费尔马大定理

孙智宏

Fermat 大定理 (Fermat's Last Theorem, FLT) 当 $n>2$ 为自然数时不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有 $xyz\neq 0$ 的整数解。

1637 年 Fermat 提出 Fermat 大定理。他在 Diophantus（丢番图）的《算术》的空白处写下这样一段话："另一方面，不能把一个立方数表为两个立方数之和，也不能把一个四次方表为两个四次方之和。一般地，每个幂次大于 2 的方幂数不能表为两个同样的方幂数之和，我对此已找到了一个真正奇妙的证明，但是空白太小写不下。"

1670 年 Fermat 的儿子发表了 Fermat 的上述评注。 Fermat 本人曾解决 $n=4$ 的情形。

1770 年 Euler(欧拉) 解决 $n=3$.

Euler 对 Fermat 的所谓证明十分好奇，曾派人去搜查 Fermat 原来居住的屋子，但一无所获。

1823 年法国女数学家 Sophie Germain(热尔曼) 证明：若 p 为奇素数且 2p+1 也是素数，则 $x^p+y^p=z^p$ 没有满足 $p\nmid xyz$ 的整数解。

当 p 为奇素数且 2p+1 也是素数时称 p 为 Germain 素数。

1825 年 Legendre(勒让德) 解决 $n=5$.

1839 年 Lame(拉梅) 解决 $n=7$.

Gauss(高斯) 尝试解决 $n=7$ 失败。他说：" Femat 大定理作为孤立的命题，对我实在没有兴趣，因为人们可以提出很多这样的问题，既无法说明它对又无法说明它不对。"

1847 年 Lame 与 Cauchy（柯西）在错误的假定下证明 FLT 。

1847-1850 年 Kummer(库莫尔)发明理想数，证明当奇素数 p 不整除 Bernoulli(伯努利) 数 $B_2,B_4,\dots,B_{p-3}$ 的所有分子时 FLT 对指数 p 成立. 由此 $p<100$ 时只有 $37,59,67$ 三个例外。

1816 年与 1850 年法国科学院两次设奖，后奖给 Kummer 一个奖牌。

1857 年 Kummer 证明 $p<100$ 时 FLT 正确。

1908 年 Wolfskehl(沃尔夫斯革尔) 设立十万马克奖金，奖给 100 年内第一个证明 FLT 的人。

科学院收到几千份关于 FLT 的错误证明，只得用如下格式答复："尊敬的先生或女士，您关于 Fermat 大定理的证明已收到，您的第一个错误出现在第 __ 页第 __ 行，现予退回。" 对此一位数学家感慨地说："谁要想发财，在这个

世界上任何途径都比证明 Fermat 大定理容易。”

1909 年 Wieferich(外什力菲) 证明：若 p 为满足 $p^2 \nmid 2^{p-1}-1$ 的奇素数，则 $x^p+y^p=z^p$ 没有满足 $p \nmid xyz$ 的整数解。

若 p 为奇素数，且 $p^2 \mid 2^{p-1}-1$ ，则称 p 为 Wieferich 素数。 1093 与 3511 是目前仅知的 Wieferich 素数。

Lebesgue(勒贝格) 晚年也从事 FLT 的研究，并错误地认为得到 FLT 的一个证明。

Laplace(拉普拉斯) 曾说：“ Fermat 那些猜想的存在是法国数学的光荣，也是法国数学的斑点，抹去这些斑点是我们法国数学家的责任。”

1957 年日本人谷山 (Taniyama) 与志村 (Shimura) 提出谷山 — 志村猜想：每个椭圆曲线均可模形式化。

1976 年 Wagstaff 应用计算机和 Kummer 方法证明 FLT 对所有指数 $p<125000$ 正确。

1983 年 Faltings(法尔廷斯) 利用代数几何方法解决古老的 Mordell (莫德尔) 猜想，由此推出对固定的自然数 $n>2$ Fermat 方程 $x^n+y^n=z^n$ 至多只有有限组非平凡解。

1985 年 Frey(弗赖) 把 FLT 转换成椭圆曲线问题，并试图说明它是谷山 — 志村猜想的推论。

若 $abc \neq 0$ 且 $a^p+b^p=c^p$ ，则考虑 Frey 曲线 $y^2=x(x+b^p)(x+c^p)$. 只要证明 Frey 曲线不存在，就说明 FLT 正确。

1985 年 Serre(塞尔) 弥补 Frey 推理中的漏洞，说明谷山 — 志村猜想加上 Serre 的水平约化猜想可推出 FLT 。

1986 年 Ribet(里贝特) 证明 Serre 的水平约化猜想，从而 FLT 成为谷山 — 志村猜想的推论。

1988 年日本人 Miyaoka(宫冈) 宣布用微分几何解决 FLT, 但经检查他的证明包含无法挽救的错误。

1992 年孙智宏与孙智伟证明：若 p 为奇素数满足 $p^2 \nmid F_{p-(\frac{p}{5})}$, 这里 F_n 为 Fibonacci 数， $(\frac{p}{5})$ 为 p 对 5 的 Legendre 符号，则 $x^p+y^p=z^p$ 没有满足 $p \nmid xyz$ 的整数解。

若 p 为奇素数满足 $p^2 \mid F_{p-(\frac{p}{5})}$, 则现在称 p 为 Wall-Sun-Sun 素数。目前尚未发现一个 Wall-Sun-Sun 素数。

1993 年 6 月英国数学家 A.Wiles(安德鲁 · 怀尔斯) 在 Newton(牛顿) 数学科学研究所作了题为“椭圆曲线，模形式和 Galois 表示”的三天演讲，宣布对半稳定的椭圆曲线证明谷山 — 志村猜想，从而解决 FLT 。

1994 年 10 月 Wiles 与 Taylor (泰勒) 弥补证明漏洞，从而最终解决历时 358 年的 Fermat 大定理。

1995 年美国杂志《 Annals of Mathematics 》（《数学年鉴》）发表了 Wiles 关于 Fermat 大定理的证明。

(A.Wiles,Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem,Annals of Mathematics, 142(1995),443-551; R.Taylor and A.Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, Annals of Mathematics, 142(1995), 553-572.)

1996 年 Wiles 获得 Wolf(沃尔夫) 奖。

1997 年 Wiles 赢得 Wolfskehl 的十万马克奖金 (100 年尚未过期 !) 。

1998 年 Wiles 在国际数学家大会上获特别贡献奖。大会主持人幽默地说：“这里地方太小，容纳不下他的证明 !”