p-正则函数及有关恒等式和同余式

淮阴师范学院　孙智宏
Homepage: http://www.hytc.edu.cn/xsjl/szh

1. p-正则函数的定义

设p为素数,$f(k)(k = 0,1,2,\ldots)$模p有意义,若对一切自然数n有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f(k)\equiv 0 \pmod{p^n},$$

则称f为p-正则函数.

例如: $f(k)=a^{k(p-1)+b}(p\nmid a, b\ge 0)$为$p$-正则函数,因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k a^{k(p-1)+b} &= a^b(1-a^{p-1})^n\\ &\equiv 0 \pmod{p^n}.\end{aligned}$$

2. $f(k) \pmod{p^n}$

引理1. 设$n \geq 1$, $k \geq 0$为整数,则

$$f(k) = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1-r}\binom{k-1-r}{n-1-r}\binom{k}{r}f(r) + \sum_{r=n}^{k}\binom{k}{r}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-1)^{r-s}f(s).$$

证明利用二项式反演公式及如下组合恒等式

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x}{j} = (-1)^m\binom{x-1}{m}.$$

定理1. 设p为素数, f为p-正则函数, $n \in \mathbb{N}$, 则对一切非负整数k有

$$f(k) \equiv \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1-r}\binom{k-1-r}{n-1-r}\binom{k}{r}f(r) \pmod{p^n}.$$

等价于$k = n$的结果!

定理2. 设p为素数，则f为p-正则函数的充分必要条件是对每个非负整数n存在整数$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$使得对一切$k = 0, 1, 2, \ldots$有

$$f(k) \equiv a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 \pmod{p^n},$$

并且f为p-正则函数时可假定$p^s \mid a_s \cdot s!$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ 且$p \geq n$时$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \pmod{p^n}$唯一确定.

定理2证明利用了两类Stirling数的性质和公式.特别是

$$s(n, m) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{1^{k_1}k_1! \cdots n^{k_n}k_n!},$$

$$S(n, m) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{1!^{k_1}k_1! \cdots n!^{k_n}k_n!}.$$

3. $f(kp^{n-1}) \pmod{p^n}$

命题 设p为素数，f为p-正则函数，$k, n \in \mathbb{N}$，则

$$f(kp^{n-1}) \equiv f(0) \pmod{p^n}.$$

更一般地有

定理3.　　设p为素数，f为p-正则函数，$m,n\in\mathbb{N}$，d,t为非负整数，则

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r f(p^{m-1}rt+d)\equiv 0 \pmod{p^{mn}}.$$

而且$p>2$时

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r f(p^{m-1}rt+d)$$
$$\equiv p^{mn}t^n\cdot p^{-n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r f(r) \pmod{p^{mn+1}}.$$

等价于$m=1,t=1,d=0$情形.

定理3证明使用了两类Stirling数的性质和如下恒等式:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{n-r}\binom{rx+d}{m}r^i$$
$$=\frac{n!}{m!}\sum_{j=n-i}^{m}\Big(\sum_{k=j}^{m}\binom{k}{j}(-1)^{m-k}s(m,k)d^{k-j}\Big)S(i+j,n)x^j.$$

4. 一个漂亮的组合恒等式

在上述包含Stirling数的恒等式中取$i = n - m$有

定理4. 设x, d为实数，$m, n \in \mathbb{N}$，$m \le n$，则

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} \binom{rx+d}{m} r^{n-m} = \frac{n!}{m!} x^m.$$

特别$m = n$时有

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} \binom{rx+d}{n} = x^n.$$

取$n = p$为素数,则导出Fermat小定理.

定理4可视为如下Euler恒等式($m = 0$)的推广:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} r^n = n!.$$

5. $f(kp^{m-1}) \pmod{p^{mn}}$

定理5. 设p为素数，f为p-正则函数，$k,m,n \in \mathbb{N}$,则

$$f(kp^{m-1}) \equiv \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1-r}\binom{k-1-r}{n-1-r}\binom{k}{r}f(rp^{m-1}) \pmod{p^{mn}}.$$

等价于$k=n,m=1$的特殊情形

我们还有$f(ktp^{m-1}+d) \pmod{p^{mn+1}}$的更一般结果.

6. 乘积定理

引理2. 设n为非负整数,则对任何函数f, g有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f(k)g(k)$$
$$=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\Bigg(\sum_{r=0}^{s}\binom{s}{r}(-1)^r F(n-s+r)\Bigg)G(s),$$

其中

$$F(m)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k f(k),$$
$$G(m)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k g(k).$$

定理6.(乘积定理) 设p为素数, f, g为p-正则函数,则$f\cdot g$也是p-正则函数.

全体p-正则函数构成一个环!

7. 包含Bernoulli数的p-正则函数

Bernoulli数$\{B_n\}$的定义:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \quad (n \geq 2).$$

熟知$B_{2n+1} = 0$ $(n \geq 1)$.

定理7. 设p为素数, b为非负整数,

(1) 若$p-1 \nmid b$,则

$$f(k) = \left(1 - p^{k(p-1)+b-1}\right) \frac{B_{k(p-1)+b}}{k(p-1)+b}$$

为p-正则函数.

(2) 若$a, b \in \mathbb{N}$,$p \nmid a$,则

$$g(k) = \left(1 - p^{k(p-1)+b-1}\right)\left(a^{k(p-1)+b} - 1\right) \frac{B_{k(p-1)+b}}{k(p-1)+b}$$

为p-正则函数.

(3) $h(k)=(p-p^{k(p-1)+b})pB_{k(p-1)+b}$为$p$-正则函数.

8. 包含Euler数的p-正则函数

Euler数$\{E_n\}$的定义:

$$E_0=1,\quad E_{2n-1}=0,\quad \sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{2r}E_{2r}=0\ (n\geq 1).$$

定理8. 设p为奇素数, b为非负偶数,则

$$f(k)=\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{k(p-1)+b}\right)E_{k(p-1)+b}$$

为p-正则函数.

定理9. 设p为奇素数, $n\in\mathbb{N}$, b为非负偶数,则存在整数$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$使得对$k=0,1,2,\ldots$有

$$\begin{aligned}&\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{k(p-1)+b}\right)E_{k(p-1)+b}\\&\equiv a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k+a_0 \pmod{p^n}.\end{aligned}$$

并且$p\geq n$时$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$模p^n唯一确定.

例如: $(1+3^{2k})E_{2k} \equiv -12k+2 \pmod{3^3}$.

引理3. 设$n \in \mathbb{N}$, $b \in \{0,2,4,\ldots\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $2^{\alpha-1} \le n < 2^{\alpha}$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k E_{2k+b} \equiv 0 \pmod{2^{2n-\alpha}}.$$

定理10. 设b为非负偶数,则$f(k)=E_{2k+b}$为2-正则函数.

定理11. 设$k,m,n,t \in \mathbb{N}$, b为非负偶数,$\alpha \in \mathbb{N}$, $2^{\alpha-1} \le n < 2^{\alpha}$, 则

$$E_{2^m kt+b} \equiv \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-1-r} \binom{k-1-r}{n-1-r} \binom{k}{r} E_{2^m rt+b} \pmod{2^{mn+n-\alpha}}.$$

9. 参考文献

(1) Zhi-Hong Sun, Congruences for Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials, Discrete Math. 163(1997), 153-163.

(2) Zhi-Hong Sun, Congruences concerning Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials, Discrete Appl. Math. 105(2000), 193-223.

(3) Zhi-Hong Sun, Congruences involving Bernoulli polynomials, Discrete Math.308(2008), 71-112.