一类 Turan 型问题*

孙智宏
(淮阴师专)

ON SOME PROBLEMS OF TURAN TYPE

Sun Zhihong
(Huaiyin Normal College)

Abstract

This paper is devoted to study the function $e(n,m;p)$, which is the maximum size in graphs with p vertices whose subgraphs of order n have at most m edges. The author determines $e(n,[\frac{n}{2}];\ p)$、$e(n,n-2;\ p)$, and generalizes Turan's theorem. Also, $e(n,n-1;p)=ex(p;\{c_3,\cdots,c_n\})$ is proved.

摘　　要

本文引入函数$e(n,m;p)$,它表示适合任意 n 点诱导子图至多有 m 条边的 p 阶图的最多边数. 文中给出了$e(n,[\frac{n}{2}];p)$和$e(n,n-2;p)$的值.讨论了$e(n,n-1;p)$,推广了 Turan 定理.

§1　引言

极值图论的一个基本问题是所谓 Turan 型问题,它要确定不含禁用子图族$\mathscr{L}$的 p 阶图的最多边数$ex(p;\mathscr{L})$. Turan [1] 于 1941 年解决了不含 k 个顶点完全图K_k 的 p 阶图最多边数问题,他证明了

$$ex(p;K_k)=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{p^2-r^2}{2}+\binom{r}{2},$$

* 1990年6月30日收到. 本文在南京大学读硕士学位时完成.

这里$p \geqslant k$,r是p被$k-1$所除得的最小余数($0 \leqslant r < k-1$).

记$T_{m,n}$为各分部顶点数尽可能平均的n个顶点的m部完全图,$T_{m,n}$称为Turan图.易知$T_{k-1,p}$就是不含子图K_k的具$ex(p;K_k)$条边的p阶图.

设$\mathscr{L}$为n个顶点且至少有$m+1$条边的图族,当$p \geqslant n$时定义.

$$e(n,m;p)=ex(p;\mathscr{L})$$

则Turan定理可表述为

$$e(k,\binom{k}{2}-1;p)=t_{k-1}(p)=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{p^2-r^2}{2}+\binom{r}{2} \tag{1.1}$$

其中$t_{k-1}(p)$为Turan图$T_{k-1,p}$的边数.

本文§2推广了Turan定理,得到

$$当p \geqslant n \geqslant k时,e(n,t_{k-1}(n);p)=t_{k-1}(p)$$

§2还给出了$e(n,m;p)$的渐近公式.

在§3中,我们确定了$e(n,[\frac{n}{2}];p)$和$e(n,n-2;p)$的值,即有

$$e(n,[\frac{n}{2}];\ \ p)=\begin{cases}[\frac{p}{2}] & 当n \geqslant 3为奇数时,\\ \lceil\frac{p}{2}\rceil 当n>4为偶数时\end{cases}$$

$$e(n,n-2;\ \ p)=\left[\frac{(n-2)p}{n-1}\right]$$

其中$[\cdot]$、$\lceil\cdot\rceil$分别是最大、最小整数函数

§4 主要证明

$$e(n,n-1;p)=ex(p;\{C_3,\cdots,C_n\})$$

这里$p \geqslant n \geqslant 3$,$C_k$是$k$个顶点的圈.

本文所讨论的图都是简单图,$e(G)$表示图G的边数,其它记号同[2].

§2 Turan定理的推广

设$t_{k-1}(p)=e(T_{k-1,p})$,我们有

引理1 设$p>k \geqslant 3$,则$t_{k-1}(p)=\left[\dfrac{pt_{k-1}(p-1)}{p-2}\right]$.

证 设$p=(k-1)t+r(0 \leqslant r < k-1)$,由(1.1)式知

$$t_{k-1}(p)=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{p^2-r^2}{2}+\binom{r}{2}$$

(1)当$r=0$时,$p=(k-1)t$, $p-1=(k-1)(t-1)+k-2$, 故

$$t_{k-1}(p-1)=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{(p-1)^2-(k-2)^2}{2}+\binom{k-2}{2}$$

$$=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{(k-1)^2(t-1)^2+2(k-2)(k-1)(t-1)}{2}+\frac{(k-2)(k-3)}{2}$$

$$=\frac{k-2}{2}[(k-1)(t-1)^2+2(k-2)(t-1)+k-3]=\frac{k-2}{2}[(k-1)t^2-2t]$$

$$=\frac{(k-2)t}{2}\cdot(p-2)$$

从而

$$\frac{pt_{k-1}(p-1)}{p-2}=\frac{(k-2)t}{2}p=\frac{k-2}{2(k-1)}p^2=t_{k-1}(p)$$

$$t_{k-1}(p)=[\frac{pt_{k-1}(p-1)}{p-2}]$$

(2)当$r\geqslant 1$时,$p-1=(k-1)t+r-1$,故

$$t_{k-1}(p-1)=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{(p-1)^2-(r-1)^2}{2}+\binom{r-1}{2}=\frac{k-2}{k-1}[\frac{p^2-r^2}{2}-(p-r)]$$

$$+\binom{r}{2}-(r-1)$$

$$=t_{k-1}(p)-(k-2)t-(r-1)=t_{k-1}(p)-(p-1-t)$$

由此

$$\frac{pt_{k-1}(p-1)}{p-2}=\frac{p}{p-2}[t_{k-1}(p)-(p-1-t)]=t_{k-1}(p)+\frac{2t_{k-1}(p)-p(p-1-t)}{p-2}$$

而

$$2t_{k-1}(p)-p(p-1-t)=\frac{k-2}{k-1}(p^2-r^2)+r(r-1)-p(p-1-\frac{p-r}{k-1})$$

$$=\frac{k-2}{k-1}p(p-r)+(r-1)p+\frac{k-2}{k-1}r(p-r)-(r-1)(p-r)-p(p-1-\frac{p-r}{k-1})$$

$$=\frac{k-2}{k-1}(p-r)r-(r-1)(p-r)=(p-r)(1-\frac{r}{k-1})$$

$$(p-r)(1-\frac{r}{k-1})-(p-2)=2-r-\frac{r(p-r)}{k-1}=2-r(t+1)<0$$

故

$$0\leqslant 2t_{k-1}(p)-p(p-1-t)=(p-r)(1-\frac{r}{k-1})<p-2$$

$$\left[\frac{pt_{k-1}(p-1)}{p-2}\right]=t_{k-1}(p)+\left[\frac{2t_{k-1}(p)-p(p-1-t)}{p-2}\right]=t_{k-1}(p)$$

综上引理得证.

引理 1 表明$t_{k-1}(p)$可以递推计算.

引理 2　设$p>n$,则

$$e(n,m;\ p)\leqslant\left[\frac{p\cdot e(n,m;\ p-1)}{p-2}\right]$$

证　设 G 是适合任意 n 点诱导子图至多有 m 条边的 p 阶图,$e(G)=e(n,m;p)$,顶点 v 具有最小次数$\delta(G)$.显然,G 的删去顶点 v 及其关联边的子图G_v适合任意 n 点诱导子图至多 m 条边,故

$$e(G_v)=e(n,m;\ p)-\delta(G)\leqslant e(n,m;\ p-1)$$

即

$$\delta(G)\geqslant e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1) \tag{2.1}$$

又

$$\delta(G)\leqslant\frac{1}{p}\sum_{v\in V(G)}d(v)=\frac{1}{p}\cdot 2e(G)=\frac{2}{p}e(n,m;\ p)$$

故

$$e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1)\leqslant\frac{2}{p}e(n,m;\ p)$$

$$e(n,m;\ p)\leqslant\left[\frac{p\cdot e(n,m;\ p-1)}{p-2}\right]$$

证完

根据引理 1、引理 2 可以给出

定理 1　(Turan 定理推广)　设$p\geqslant n\geqslant k\geqslant 3$,则

$$e(n,t_{k-1}(n);\ p)=t_{k-1}(p)$$

证　对 p 归纳证明.

当$p=n$时,显然公式正确.

设$p>n$,公式已对 $p-1$ 正确,由引理 1、2 得

$$e(n,t_{k-1}(n);\ p)\leqslant\left[\frac{p\cdot e(n,t_{k-1}(n);\ p-1)}{p-2}\right]=\left[\frac{p.t_{k-1}(p-1)}{p-2}\right]=t_{k-1}(p)$$

而 Turan 图$T_{k-1,p}$表明

$$e(k,\binom{k}{2}-1;\ p\quad)\geqslant t_{k-1}(p)$$

故

$$e\left(k,\binom{k}{2}-1;\ p\right)=t_{k-1}(p)$$

$T_{k-1,p}$适合任意 k 点诱导子图至多$\binom{k}{2}-1$条边,因而适合任意 n 点诱导子图至多 $e\left(k,\binom{k}{2}-1;\ n\right)=t_{k-1}(n)$条边,从而

$$e(n,t_{k-1}(n);\ p)\geqslant e(T_{k-1,p})=t_{k-1}(p)$$

于是

$$e(n,t_{k-1}(n);\ p)=t_{k-1}(p)$$

由归纳法原理定理得证.

Turan 定理是定理 1 在$n=k$时的特殊情形.

由定理 1 可得如下推论.

推论 1 $ex(p;\ K_4-x)=ex(p;\ K_3)=[\frac{p^2}{4}]$

证 $ex(p;\ K_4-x)=e(4,4;\ p)=e(3,2;\ p)=ex(p;\ K_3)=t_2(p)=[\frac{p^2}{4}]$

推论 2 设$p\geqslant n\geqslant 2m$,则

$$e\left(n,\binom{n}{2}-m;\ p\right)=t_{n-m}(p)$$

证 由(1.1)式知,当$n\geqslant 2m$时$t_{n-m}(p)=\binom{n}{2}-m$,故由定理 1 立得推论.

推论 3 $\binom{p}{2}-t_{k-1}(p)=\min\limits_{n_1+\cdots+n_{k-1}=p}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{n_i}{2}$

证 对任给适合$\sum\limits_{i=1}^{k-1}n_i=p$的 $k-1$ 个非负整数$n_1,\cdots,n_{k-1}$,令$G=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}K_{n_i}}$.则 G 不含K_k子图,因而

$$e(G)=\binom{p}{2}-\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n_i}{2}\leqslant e\left(k,\binom{k}{2}-1;\ p\right)=t_{k-1}(p)$$

又对$p=(k-1)t+r(0\leqslant r<k-1)$,

$$\binom{p}{2}-t_{k-1}(p)=(k-1-r)\binom{t}{2}+r\binom{t+1}{2}$$

故有推论.

由引理 2 知$e(n,m;p)\leqslant\dfrac{p\cdot e(n,m;\ p-1)}{p-2}$,故

$$\frac{1}{2}>\frac{\binom{p}{2}-e(n,m;\ p)}{p^2}\geqslant\frac{\frac{p^2-p}{2}-\frac{p\cdot e(n,m;\ p-1)}{p-2}}{p^2}>\frac{\binom{p-1}{2}-e(n,m;\ p-1)}{(p-1)^2}$$

序列$\left\{\dfrac{\binom{p}{2}-e(n,m,p)}{p^2}\right\}$单调有界,因而极限$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{\binom{p}{2}-e(n,m;\ p)}{p^2}$从而$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{e(n,m;\ p)}{p^2}$存在.

若$t_{k-1}(n)\leqslant m<t_k(n)$,则

$t_{k-1}(p)=e(n,t_{k-1}(n);p)\leqslant e(n,m;\ p)\leqslant e(n,t_k(n);p)=t_k(p)$

故

$$\frac{k-2}{2(k-1)}p^2\leqslant\lim_{p\to\infty}\frac{e(n,m;\ p)}{p^2}\leqslant\frac{k-1}{2k}p^2$$

引理 3 (Erdös. Simonovits [3])设 $\mathcal{L}$为禁用子图族,$\chi(\mathcal{L})=\min\{\chi(L)-1:L\in\mathcal{L}\}$,则

$$ex(p;\mathscr{L})=(1-\frac{1}{\chi(\mathscr{L})})\binom{p}{2}+o(p^2)$$

定理 2 设$t_{k-1}(n)\leqslant m<t_k(n)$,$\delta_p(n,m)$为某个适合任意 n 点诱导子图至多 m 条边的具$e(n,m;\ p)$条边的 p 阶图最小次数,则当$p\to+\infty$时

$$e(n,m,p)\sim\frac{k-2}{2(k-1)}p^2;\qquad \delta_p(n,m)\sim\frac{k-2}{k-1}p$$

证 设$\mathscr{L}$为 n 个顶点至少$m+1$条边的图族,则由$m+1>t_{k-1}(n)$知每个禁用子图含有 k 完全子图,从而$\chi(\mathscr{L})\geqslant k-1$.又$T_{k,n}\in\mathscr{L}$,$\chi(T_{k,n})-1=k-1$,故$\chi(\mathscr{L})=k-1$.由引理 3 得

$$e(n,m;\ p)\sim\frac{k-2}{2(k-1)}p^2\qquad(p\to+\infty)$$

据 Stolz 定理有

$$\lim_{p\to\infty}\frac{e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1)}{p^2-(p-1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\frac{e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1)}{p}=\frac{k-2}{2(k-1)}$$

而由引理 2 证明知

$$\frac{e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1)}{p}\leqslant\frac{\delta_p(n,m)}{p}\leqslant\frac{2e(n,m;\ p)}{p^2}$$

故由极限的两边夹定理得

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\delta_p(n,m)}{p}=\frac{k-2}{k-1}\qquad\text{证毕}$$

极据引理 1 的证明和 Turan 定理,我们提出如下猜想.

猜想 1 设$p>n\geqslant 3$,则存在适合任意 n 点诱导子图至多 m 条边的 p 阶图 G,使

$$e(G)=e(n,m;\ p),\ \delta(G)=e(n,m;\ p)-e(n,m;\ p-1)$$

§ 3 $e(n,[\frac{n}{2}];\ p)$和$e(n,n-2;\ p)$

定理 3 设$p\geqslant n\geqslant 3,n\neq 4$,则

$$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\begin{cases}[\frac{p}{2}] & \text{当}2\nmid n\text{时}.\\ [\frac{p+1}{2}] & \text{当}2|n\text{时}\end{cases}$$

证:对 p 归纳

(1)当$p=n$时,显然公式正确.

(2)设$p>n$,公式已对$p-1$正确,下证公式对 p 成立.

显然图$[\frac{p}{2}]K_2\bigcup K_{p-2[\frac{p}{2}]}$适合任意 n 点诱导子图至多$[\frac{n}{2}]$条边,故$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\geqslant[\frac{p}{2}]$.

当$2|n$且$2\nmid p$时图$K_{1,2}\bigcup\frac{p-3}{2}K_2$适合任意 n 点诱导子图至多$\frac{n}{2}$条边,故此时$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\geqslant\frac{p+1}{2}$.

另一方面,由归纳假设和引理 2 知

当$2\nmid n$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\leqslant\left[\frac{p}{p-2}\left[\frac{p-1}{2}\right]\right]=\left[\frac{p+1}{2}\right]$;

当$2|n$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\leqslant[\frac{p}{p-2}[\frac{p}{2}]]=[\frac{p}{2}]+1$;

故有

(i)　当$2\nmid n$且$2|p$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=[\frac{p}{2}]$

(ii)　当$2\nmid n$且$2\nmid p$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p-1}{2}$或$\frac{p+1}{2}$.

若$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p+1}{2}$,$G$是适合任意 n 点诱导子图至多$[n/2]$条边的具$\frac{p+1}{2}$条边的 p 阶图,则由(2.1)式和归纳假设知

$$1+\frac{1}{p}=\frac{2e(G)}{p}\geqslant\delta(G)\geqslant\frac{p+1}{2}-\frac{p-1}{2}=1$$

即$\delta(G)=1$

设G中恰有 k 个点度为 1,则

$$p+1=2e(G)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant k+2(p-k)=2p-k$$

由此$k=p-1$或p.

若$k=p-1$,则G恰有一点度为 2,其余点度为 1,故$G\cong K_{1,2}\bigcup\frac{p-3}{2}K_2$.因$2\nmid n$,此图有 n 点诱导子图含$\frac{n+1}{2}$条边,与 G 的假定矛盾.

若$k=p$,则$\sum_{v\in V(G)}d(v)=p\cdot 1=p\not\equiv 0(\mathrm{mod}2)$,矛盾.

可见$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\neq\frac{p+1}{2}$,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p-1}{2}=[\frac{p}{2}]$.

(iii) 当$2|n$且$2\nmid p$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p+1}{2}$.

(iv) 当$2|n$且$2|p$时,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p}{2}$或$\frac{p}{2}+1$

若$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p}{2}+1$,$G$是适合任意 n 点诱导子图至多$[\frac{n}{2}]$条边的 p 阶图,,$e(G)=\frac{p}{2}+1$,则由(2.1)式和归假知$\delta(G)\geqslant\frac{p}{2}+1-\frac{p}{2}=1$.

设 G 中恰有 k 个点度为 1,则

$$p+2=2e(G)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant k\cdot 1+(p-k)\cdot 2=2p-k$$

即$k\geqslant p-2$.

若$k=p-2$,则 G 恰有$p-2$个点度为1,另两点度之和为4,故$G\cong 2K_{1,2}\bigcup\frac{p-6}{2}K_2$或$G\cong P_4\bigcup\frac{p-4}{2}K_2$.因 n 为大于4的偶数,这两个图都有 n 点诱导子图含$\frac{n}{2}+1$条边,与 G 的假定矛盾.

若$k=p-1$,则 G 中一点度为3,其余点度为1,故$G\cong K_{1,3}\bigcup\frac{p-4}{2}K_2$.因 n 为偶数,$K_{1,3}\bigcup\frac{p-4}{2}K_2$中有 n 点诱导子图含$\frac{n}{2}+1$条边,与 G 的假定矛盾.

若$k=p$,则$e(G)=\frac{p}{2}\neq\frac{p}{2}+1$,矛盾.

可见$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)\neq\frac{p}{2}+1$,$e(n,[\frac{n}{2}];\ p)=\frac{p}{2}$.

综合(i)(ii)(iii)(iv)知公式对 p 成立.

(3)由归纳法原理定理获证.

定理4 设$p\geqslant n\geqslant 3$,则$e(n,n-2;\ p)=[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

证: 设$p=(n-1)k+r,0\leqslant r<n-1$,$G'$为 k 个$n-1$点的树和1个 r 点树的并,则

$e(G')=k(n-2)+max\{r-1,0\}=k(n-2)+[\frac{r(n-2)}{n-1}]=[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

在 G'任取 n 点,假定这 n 点分布在 G'的 s 个连通分支中,则此 n 点诱导子图至多$n-s$条边.因 G'的每一个分支至多有$n-1$个点,故$s\geqslant 2,n-s\leqslant n-2$,$G'$适合任意 n 点诱导子图至多$n-2$条边,从而$e(n,n-2;\ p)\geqslant e(G')=[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

下证$e(n,n-2\ ;\ p)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

设 G 是适合任意 n 点诱导子图至多 $n-2$ 条边的 p 阶图,G_1、G_2、…、G_t为 G 的连通分支,t 为连通分支数,$v(G_i)=p_i,e(G_i)=q_i,i=1,\cdots,t$.要证$e(G)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

(1) $p_j\leqslant n-1,\quad j=1,2,\cdots,t$.

若$p_j\geqslant n(1\leqslant j\leqslant t)$,则$G_j$有生成树$T_{p_j}$,$T_{p_j}$有 n 点子树T_n,$e(T_n)=n-1$.这与 G 中任意 n 点诱导子图至多$n-2$条边矛盾,故$p_j\leqslant n-1$.

(2)若G_1、…、G_t都是树,则$e(G)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

因$p=\sum_{j=1}^{t}p_j\leqslant t\cdot(n-1)$,故$e(G)=p-t\leqslant p-\frac{p}{n-1}=\frac{(n-2)p}{n-1}$,$e(G)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

由(2)我们只要考虑 G 的分支不全为树的情形,不妨假设G_{s+1}、…、G_t是 G 的全部非

树分支,我们有

(3) $\sum_{j=s+1}^{t} p_j \leqslant n-1$

若不然 $\sum_{j=s+1}^{t} p_j \geqslant n$,由于$q_j \geqslant p_j(s+1 \leqslant j \leqslant t)$,故可在 $\bigcup_{j=s+1}^{t} G_j$ 中选取 n 个点使其由一些分支的全部顶点和某个分支的一子树顶点组成.此 n 点诱导子图至少有 $n-1$ 条边,与 G 的假定矛盾.

(4) 令$l=\sum_{j=s+1}^{t} q_j-\sum_{j=s+1}^{t} p_j$, 则$0 \leqslant l \leqslant s-2$

任给$s+1 \leqslant j \leqslant t, q_j \geqslant p_j$,故$l \geqslant 0$.

由(3)知 $\sum_{j=s+1}^{t} p_j \leqslant n-1<n \leqslant p$,故$s \geqslant 1$.可在森林$\bigcup_{j=1}^{s} G_j$中选取$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点使其诱导子图至少有$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j-s$条边.此$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点和 $\bigcup_{j=s+1}^{t} G_j$ 中的 $\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点构成的 n 点集诱导子图至少有 $\sum_{j=s+1}^{t} q_t+n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j-s=n+l-s$条边根据 G 的假定应有$l+n-s \leqslant n-2$,即$l \leqslant s-2$.

(5) $\sum_{j=s+1}^{t} p_j+\sum_{j=1}^{l+1} p_j \leqslant n-1$

若 $\sum_{j=s+1}^{t} p_j+\sum_{j=1}^{l+1} p_j \geqslant n$,则可在$\bigcup_{j=1}^{l+1} G_j$中选取$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点使其诱导子图至少有$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j-(l+1)$条边.此$n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点与 $\bigcup_{j=s+1}^{t} G_j$ 的 $\sum_{j=s+1}^{t} p_j$个点构成的 n 点集诱导子图至少有

$$\sum_{j=s+1}^{t} q_j+n-\sum_{j=s+1}^{t} p_j-(l+1)=n-1$$

条边,与 G 的假定矛盾.

(6) $e(G) \leqslant\left[\frac{(n-2) p}{n-1}\right]$

由(5)知 $\sum_{j=l+2}^{s} p_j=p-\sum_{j=s+1}^{t} p_j-\sum_{j=1}^{l+1} p_j \geqslant p-(n-1)$,再由(1)得

$$p-(n-1) \leqslant \sum_{j=l+2}^{s} p_j \leqslant(s-l-1)(n-1)$$

即

$$s-l-1 \geqslant \frac{p}{n-1}-1, \quad l \leqslant s-\frac{p}{n-1}$$

由此

$$e(G)=\sum_{j=s+1}^{t}q_j+\sum_{j=1}^{s}(p_j-1)\leqslant\sum_{j=s+1}^{t}p_j+s-\frac{p}{n-1}+\sum_{j=1}^{s}p_j-s=p-\frac{p}{n-1}=\frac{(n-2)p}{n-1}$$

因$e(G)$为整数,故$e(G)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$.

由于 G 是任意选取的适合任 n 点诱导子图至多$n-2$条边的 p 阶图,故知$e(n,n-2;\ p)\leqslant[\frac{(n-2)p}{n-1}]$,从而定理得证.

§4 围长不小于给定数的图的最多边数

本节主要研究围长不小于 g 的 p 阶图最多边数$e_g(p)$,证明$e_g(p)=e(g-1,g-2;p)$.

当图 G 不含圈时,我们约定图 G 围长为$+\infty$.

设$p\geqslant g$,$e'_g(p)$是围长为 g 的 p 阶图最多边数,则$e_g(p)=e'_g(P)$.这是因为在图的项点依次为$v_1,v_2,\cdots,v_n$的最短圈中删除边v_1v_n增加边v_1v_{n-1}后所得图与原来的图有相同的顶点数和边数而围长减少 1,不断重复这样做,可把图的围长降到指定值而不改变图的顶点数和边数.这里不需考虑围长为$+\infty$的图,因为$e_\infty(p)=p-1<p=e(C_p)\leqslant e_g(p)$.

显然$e_3(p)=e(k_p)=e(2,1;p)$,$e_4(p)=ex(p,K_3)=e(3,2,;p)$.这一事实的重要推广是下面的

定理 5 设$p\geqslant g-1\geqslant 2$,则$e_g(p)=e(g-1,g-2;p)$.

证 由于$e_g(g-1)=g-2=e(g-1,g-2;g-1)$,$g=3,4$已经成立,故以下设$p\geqslant g\geqslant 5$.

在围长不小于 g 的图中任意$g-1$点诱导子图不含圈,因而任意 $g-1$ 点诱导子图至多 $g-2$ 条边.由此$e_g(p)\leqslant e(g-1,g-2;p)$.

设 G 是适合任意$g-1$点诱导子图至多$g-2$条边的 p 阶图,$e(G)=e(g-1,g-2;p)$.欲证$e(G)\leqslant e_g(p)$.

假定$G=\bigcup_{i=1}^{t}G_i$,G_1、G_2、…、G_t为 G 的连通分支,t 为连通分支数,$v(G_i)=p_i$,$e(G_i)=q_i$,$i=1,2,\cdots,t$.

(1) 若$p_i\geqslant g-1$,则G_i围长$\geqslant g$.

由 G 的假定知G_i不含$g-1$圈.若G_i含有 k 圈$C_k(3\leqslant k\leqslant g-2)$,则由$G_i$连通和$p_i\geqslant g-1$ 知在G_i中存在含C_k在内的$g-1$阶连通子图.此连通子图有$g-1$个点,至少$g-1$条边,与 G 的假定矛盾,因而G_i围长$\geqslant g$.

(2) 若存在$i(1\leqslant i\leqslant t)$使$p_i\geqslant g-1$.则$e(G)\leqslant e_g(p)$.

如 G 的所有分支围长$\geqslant g$,则 G 的围长$\geqslant g$,因而$e(G)\leqslant e_g(p)$.故不妨设 G 有一分支G_j围长$<g$(从而$\leqslant g-2$).由(1)知$p_j\leqslant g-2$.由于G_i连通且$p_i\geqslant g-1$,故在G_i中存在$g-1-p_j$个点诱导子图至少有$g-2-p_j$条边.此$g-1-p_j$个点和G_j中的点构成$g-1$点集,其诱导子图至少有$q_j+g-2-p_j$条边.根据 G 的假定得出$q_j\leqslant p_j$.又G_j连通有圈,$q_j\geqslant p_j$,故

$q_j = p_j$.

令$J = \{j:G_j 围长小于 g, 1 \leqslant j \leqslant t\}$,,$n = \sum_{j\in J} p_j$,取$v_0 \in V(G_t)$,从 G 中删去所有围长小于 g 的分支,增加顶点$v_1, v_2, \cdots, v_n$及边$v_{i-1}v_i(i = 1,2,\cdots,n)$得图$G_0$.易见$G_0$围长$\geqslant g$, $e(G) = e(G_0) \leqslant e_g(p)$.

(3) 若$\sum_{j\in J} p_j > g-1$,则$e(G) \leqslant e_g(p)$.

(a) 存在$j_0 \in J$使$q_{j_0} \geqslant p_{j_0} + 1$.

由(2)可设$p_{j_0} \leqslant g-2 < g-1$.因$\sum_{j\in J} p_j \geqslant g-1$,故可从$\bigcup_{j\in J} G_j$中选取 $g-1$个点使其诱导子图至少有$g-1$条边,选法如下:所选取点为$\bigcup_{j\in J} G_j$中包含G_{j_0}在内的一些分支的全部顶点和某一分支一子树的顶点.这引出矛盾.

(b) 任给$j \in J$, $q_j = p_j$.

令$G_1 = (\bigcup_{j\notin J} G_j) \bigcup C_{\sum_{j\in J} p_j}$,则$G_1$围长$\geqslant g$,$e(G) = e(G_1) \leqslant e_g(p)$.

(4) 若$\sum_{j\in J} p_j \leqslant g-1$,则$e(G) \leqslant e_g(p)$.

由(2)可假定$p_i \leqslant g-2(i = 1,2,\cdots,t)$,又对$j \notin J$子图$G_j$连通且围长$\geqslant g$,故当$j \notin J$时,$G_j$为树,$q_j = p_j - 1$.

记$s = t - |J|$,分以下两种情况.

(a) $\sum_{j\in J} q_j \leqslant \sum_{j\in J} p_j + s$

这时$e(G) = \sum_{j\in J} q_j + \sum_{j\notin J} q_j \leqslant \sum_{j\in J} p_j + s + \sum_{j\notin J}(p_j - 1) = \sum_{j=1}^{t} p_j = p = e(C_p) \leqslant e_g(p)$.

(b) $\sum_{j\in J} q_j > \sum_{j\in J} p_i + s$

由(3)可设$\sum_{j\in J} p_j \leqslant g-1$,可在$\bigcup_{j\notin J} G_j$中选取$g-1-\sum_{j\in J} p_j$个点使其诱导子图至少有$max\{0, g-1-\sum_{j\in J} p_j - s\}$条边.此$g-1-\sum_{j\in J} p_j$个点与$\bigcup_{j\in J} G_j$中的$\sum_{j\in J} p_j$个点构成的$g-1$点集诱导子图至少有

$$\sum_{j\in J} q_j + max\{0, g-1-\sum_{j\in J} p_j - s\} \geqslant \sum_{j\in J} q_j + g-1-\sum_{j\in J} p_j - s > g-1$$

条边,与 G 的假定矛盾.

综合(3),(4)可知$e(G) = e(g-1, g-2;\ p) \leqslant e_g(p)$,于是定理获证.

根据 Erdös 偶圈定理[4] $ex(p;\ c_{2k})=O(p^{1+\frac{1}{k}})$可得

$$e(n,n-1;\ p)=e_{n+1}(p)\leqslant \mathrm{ex}(p;\ C_{2[\frac{n}{2}]})=O(p^{1+\frac{1}{[\frac{n}{2}]}})$$

由此$e(4,3;\ p)=O(p^{\frac{3}{2}}),e(6,5;\ p)=O(p^{\frac{4}{3}})$.

由[5]知任何图 G 有二部生成子图 H 使$e(H)\geqslant\frac{e(G)}{2}$.而$ex(p;\ C_4)\sim\frac{1}{2}p\sqrt{p}$([6]).故当$p\to+\infty$时$e(4,3,p)=e_5(p)>\frac{1}{4}p\sqrt{p}$.

上面给出的$e(6,5;p)$的界也是最好的,因为 Benson[7] 的构造显明$e_7(p)\geqslant e_8(p)\geqslant\frac{1}{2}(\frac{p}{2})^{\frac{4}{3}}-o(p^{\frac{4}{3}})$.

参考文献

1 P. Turan, On an extremal problem in graph theory, Mat. Fiz. Lapok 48(1941), 436–452; MR8, 284j.

2 J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications. London, Macmillan, 1976.

3 M. Simonovits, Extremal graph theory, Selected Topics, in Graph Theory 2, (ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson), Academic Press, London, 1983.

4 J. A. Bondy, M. Simonivits, Cycles of even length in graphs, J. Combin. Theory Ser. B 16(1974), no.2 97–105; MR 49 # 4851.

5 P. Erdos, On some extremal problems in graph theory, Israel J. Math. 3(1965), 113–116.

6 Z. Furedi, Graphs without Quadrilaterals, J. Combin. Theory Ser. B 34(1983), no.2, 187–190.

7 C. T. Benson, Minimal regular graphs of girths eight and twelve, Canad. J. Math. 18(1966), 1091–1094; MR 33 # 5507.