文章编号：1007-8444（1999）03-0006-08

循环矩阵的逆矩阵、谱条件数与可逆条件

孙智宏

（淮阴师范学院 数学系，江苏 淮阴 223001）

摘　要：本文确定了循环矩阵的逆矩阵、谱范数与谱条件数，讨论了循环矩阵的可逆条件，特别给出了 p 阶、$2p$ 阶（p 为奇素数）与 2^m 阶循环矩阵可逆的实用判别法.

关键词：循环矩阵；逆矩阵；可逆条件；谱范数；特征值

中图法分类号：O151.21　　**文献标识码**：A

1　引言

无论在纯粹数学还是在应用数学领域，循环矩阵都有着十分广泛的应用（参见[1]－[3]），因而它的研究有着特殊的重要性.

所谓循环矩阵是指由 n 个复数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 组成的如下矩阵

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

易见，单位矩阵是循环矩阵，循环矩阵的乘积也是循环矩阵.

在本文中我们用记号 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 表示上述循环矩阵，若对满足 $r \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 的整数 r 规定 $a_r = a_{r(n)}$，这里 $r(n)$ 为 r 关于模 n 的最小非负剩余，则 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的第 i 行第 j 列元素为 a_{j-i}.

关于循环矩阵的行列式，我们有如下熟知结果（见[4]－[6]）：

（1.1）循环矩阵 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的行列式值为

$$|A| = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{n}}\right).$$

由于循环矩阵 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的特征矩阵为 $M(\lambda - a_0, -a_1, \cdots, -a_{n-1})$，故由（1.1）式易得

收稿日期：1999-04-20
基金项目：江苏省教委自然科学基金资助项目（98KJD110008）
作者简介：孙智宏（1965-），男，江苏涟水人，硕士，副教授.

(1.2) 循环矩阵 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的特征值为

$$\lambda_k = \sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{n}} (k = 0,1,\cdots,n-1).$$

在本文中我们确定了循环矩阵的逆矩阵、谱范数与谱条件数，讨论了循环矩阵的可逆条件，特别给出了 p 阶、$2p$ 阶（p 为奇素数）与 2^m 阶循环矩阵非奇异的实用判别法.

2 循环矩阵的逆矩阵、谱范数与谱条件数

定理 1 设 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 为 n 阶循环矩阵，则当且仅当 $\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{n}} \neq 0 (k = 0,1,\cdots,n-1)$ 时 A 可逆，且 A 可逆时 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = M(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$，其中

$$b_m = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{sr}{n}}} e^{-2\pi i \frac{sm}{n}}.$$

证：令 $\lambda_k = \sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{n}} (0 \leqslant k \leqslant n-1)$，则 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 恰是 A 的全部特征值. 由于 $|A| = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}$，故当且仅当 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 全不为0时 A 可逆. 现设 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 全不为0，记 $B = M(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$，欲证 $B = A^{-1}$. 今以 a_{rj}、b_{rj}、$c_{rj} (1 \leqslant r, j \leqslant n)$ 分别表示 A、B、AB 的第 r 行第 j 列元素，则有

$$\begin{aligned} c_{rj} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{rk} b_{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-r} b_{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-r} \cdot \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_s} e^{-2\pi i \frac{s(j-k)}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_s} e^{2\pi i \frac{(r-j)s}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-r} e^{2\pi i \frac{(k-r)s}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_s} e^{2\pi i \frac{(r-j)s}{n}} \cdot \lambda_s \\ &= \begin{cases} 1 & \text{当 } r = j \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1 - (e^{2\pi i \frac{r-j}{n}})^n}{1 - e^{2\pi i \frac{r-j}{n}}} = 0 & \text{当 } r \neq j \text{ 时}, \end{cases} \end{aligned}$$

故 AB 为 n 阶单位矩阵，从而 $B = A^{-1}$.

由此定理易知，全体 n 阶可逆的循环矩阵构成群.

在接下去讨论循环矩阵的谱范数与谱条件数之前，我们先交待一下要使用的若干记号：

$\bar{a}$ ——复数 a 的共轭复数，$|a|$ ——复数 a 的模，$j(n)$ —— j 关于模 n 的最小非负剩余，A^{-1} ——矩阵 A 的逆矩阵，A^T ——矩阵 A 的转置矩阵，$\bar{A}$ ——矩阵 A 的共轭矩阵，$A^H = (\bar{A})^T$，$|A|$ ——矩阵 A 的行列式，$\lambda_{max}(A)$ —— Hermite 矩阵 A 的最大特征值，$\| A \| = \sqrt{\lambda_{max}(AA^H)}$ 表示矩阵 A 的谱范数，$Cond(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$ 表示可逆矩阵 A 的谱条件数.

引理 1 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为复数，$a_j = a_{j(n)}$，$c_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{a_{i-k}} (k = 0,1,\cdots,n-1)$，对 $s = 0,1,\cdots,n-1$，令 $\lambda_s = \sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i \frac{rs}{n}}$，$\beta_s = \sum_{r=0}^{n-1} c_r e^{2\pi i \frac{rs}{n}}$，则 $\beta_s = |\lambda_s|^2$，$s = 0,1,\cdots,n-1$.

证：因

$$c_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{a_{i-k}} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+k} \bar{a}_j$$

故

$$c_k e^{2\pi i\frac{ks}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+k}\bar{a}_j e^{2\pi i\frac{ks}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+k} e^{2\pi i\frac{(k+j)s}{n}} \cdot \bar{a}_j e^{-2\pi i\frac{js}{n}},$$

从而

$$\beta_s = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi i\frac{ks}{n}} = (\sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_j e^{-2\pi i\frac{js}{n}})(\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+k} e^{2\pi i\frac{(k+j)s}{n}})$$

$$= \overline{\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{2\pi i\frac{js}{n}}} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}} = \bar{\lambda}_s\lambda_s = |\lambda_s|^2 \qquad (s = 0,1,\cdots,n-1).$$

由此引理得证.

定理 2 设 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 为 n 阶循环矩阵,$\lambda_s = \sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}} (s = 0,1,\cdots,n-1)$,则

(1) A 的谱范数为

$$\| A \| = \max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|,$$

(2) 当 A 可逆时 A 的谱条件数为

$$Cond(A) = \frac{\max\limits_{0\leqslant s\leqslant n-1} \lambda_s}{\min\limits_{0\leqslant s\leqslant n-1} \lambda_s}.$$

证:(1) 令 A^H 为 A 的共轭矩阵的转置,则易见 $AA^H = A^HA = M(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$,其中 $c_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{a_{i-k}}$ $(k = 0,1,\cdots,n-1)$. 记 $\beta_s = \sum_{r=0}^{n-1} c_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}} (s = 0,1,\cdots,n-1)$,则由(1.2)式知 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ 恰是 AA^H 的全部特征值. 但由引理 1 知,$\beta_s = |\lambda_s|^2 (0 \leqslant s \leqslant n-1)$,故

$$\| A \| = \sqrt{\lambda_{max}(AA^H)} = \sqrt{\max_{0\leqslant s\leqslant n-1} \beta_s} = \sqrt{\max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|^2} = \max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|.$$

(2) 由于

$$A^{-1}(A^{-1})^H = A^{-1}(A^H)^{-1} = (A^HA)^{-1} = (AA^H)^{-1},$$

故由上知 $A^{-1}(A^{-1})^H$ 的特征值为 $|\lambda_s|^{-2} (s = 0,1,\cdots,n-1)$,
从而

$$\| A^{-1} \| = \sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}(A^{-1})^H} = \sqrt{\max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|^{-2}} = \max_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|^{-1} = (\min_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|)^{-1}.$$

由此

$$Cond(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \| = \frac{\max\limits_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|}{\min\limits_{0\leqslant s\leqslant n-1} |\lambda_s|}.$$

综上,定理得证.

注 1:(1) 矩阵的谱半径 $\rho(A) = \max\limits_s |\lambda_s|$ 是一切矩阵范数之下确界([7, p.175]),因此循环矩阵的谱范数达到矩阵范数之最小值.

(2) 设 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 为循环矩阵,则 $AA^H = M(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) = A^HA$,其中 $c_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{a_{i-k}}$ $(k = 0,1,\cdots,n-1)$,故循环矩阵为正规矩阵(见[8]),从而其特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 满足等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|^2 = n\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^2.$$

这正是有限离散 *Fourier* 变换的 *Parseval* 等式,它可由引理 1 直接证得。

引理 2 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 n 个复数,$s \in \{0,1,\cdots,n-1\}$,则

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}}\right| \geqslant 2\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

证:设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 按模从小到大的顺序为 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-1}}$,则由模的不等式知:当 $0 \leqslant m < n-1$ 时有

$$|\sum_{k=m}^{n-1} a_{i_k} e^{2\pi i\frac{i_k s}{n}}| \geq |\sum_{k=m+1}^{n-1} a_{i_k} e^{2\pi i\frac{i_k s}{n}}| - |a_{i_m} e^{2\pi i\frac{i_m s}{n}}| = |\sum_{k=m+1}^{n-1} a_{i_k} e^{2\pi i\frac{i_k s}{n}}| - |a_{i_m}|.$$

今取 $m=0,1,\cdots,n-2$,把上述不等式相加即得

$$|\sum_{k=0}^{n-1} a_{i_k} e^{2\pi i\frac{i_k s}{n}}| \geq |a_{i_{n-1}} e^{2\pi i\frac{i_{n-1} s}{n}}| - |a_{i0}| - |a_{i_1}| - \cdots - |a_{i_{n-2}}|$$

$$= |a_{i_{n-1}}| - \sum_{k=0}^{n-2} |a_{i_k}| = 2|a_{i_{n-1}}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{i_k}| = 2\max_{0\leq i\leq n-1} |a_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|,$$

故

$$|\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}}| = |\sum_{k=0}^{n-1} a_{i_k} e^{2\pi i\frac{i_k s}{n}}| \geq 2\max_{0\leq i\leq n-1} |a_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|.$$

引理得证.

定理 3 设 $A=M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 为循环矩阵,则当 $\max\limits_{0\leq i\leq n-1} |a_i| > \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|$ 时 A 可逆,且

$$Cond(A) \leq \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{2\max\limits_{0\leq i\leq n-1} |a_i| - \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}.$$

证:若

$$\max_{0\leq i\leq n-1} |a_i| > \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|,$$

则由引理 2 知

$$|\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}}| > 0 \ (s=0,1,\cdots,n-1).$$

由此据(1.1)式得

$$|A| = \prod_{s=0}^{n-1}(\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}}) \neq 0,$$

从而 A 可逆.

令 $\lambda_s = \sum\limits_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}} (s=0,1,\cdots,n-1)$,则由模的不等式知

$$|\lambda_s| \leq \sum_{r=0}^{n-1} |a_r e^{2\pi i\frac{rs}{n}}| = \sum_{r=0}^{n-1} |a_r|.$$

又由引理 2 知

$$|\lambda_s| \geq 2\max_{0\leq i\leq n-1} |a_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|,$$

故由定理 2 得

$$Cond(A) = \frac{\max\limits_{0\leq s\leq n-1} |\lambda_s|}{\min\limits_{0\leq s\leq n-1} |\lambda_s|} \leq \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{2\max\limits_{0\leq i\leq n-1} |a_i| - \sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}.$$

于是定理获证.

矩阵的条件数反映相应的线性方程组系数阵与自由项有微小摄动时方程组解的变化大小.条件数越大,解对初始数据误差的灵敏度就越高,这时方程组或系数阵便是坏条件的或病态的.一般矩阵的条件数很难求得(见[7]),也缺乏估计,但定理 2 和定理 3 则对循环矩阵较圆满地解决了这一问题.

3 循环矩阵的可逆性判定

在对有限离散信号进行处理时,常会遇到循环矩阵的求逆,这就要求我们首先判定给定的循环矩阵是否可逆.

引理 3 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为 n 个复数,$A = M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 为循环矩阵,$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r$,$\varphi(x) = x^n - 1$,则 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的结式 $R(f,\varphi) = |A|$.

证:由结式定义([9,p.96])知 $R(f,\varphi)$ 为如下的 $2n-1$ 阶行列式:

$$R(f,\varphi) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & & & & \\ & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

对 $j = 1,2,\cdots,n-1$ 将行列式的第 j 列加到第 $n+j$ 列后得到

$$R(f,\varphi) = \left|\begin{pmatrix} P & A^T \\ I & O \end{pmatrix}\right|,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

A^T 为 $A = M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的转置矩阵,I 为 $n-1$ 阶单位矩阵,O 为 $n-1$ 行 n 列的零矩阵.

由上及 *Laplace* 展开定理([9,p.120])知

$$R(f,\varphi) = |I|\cdot|A^T|\cdot(-1)^{\sum_{i=n+1}^{2n-1} i+\sum_{j=1}^{n-1} j} = |A^T|\cdot(-1)^{2n(n-1)} = |A|.$$

于是引理得证.

值得指出,由于 $x^n - 1 = 0$ 的全部根为 $e^{2\pi ik/n}(k = 0,1,\cdots,n-1)$,故由引理3和结式计算公式(见[9])得

$$(*) \qquad |M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})| = R\left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r, x^n - 1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r e^{2\pi i\frac{kr}{n}}\right).$$

这就给出了循环行列式计算公式(1.1)的又一证法.

定理 4 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为 n 个复数,则循环矩阵 $M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 可逆的充分必要条件是多项式 $\sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r$ 与 $x^n - 1$ 无公根.

证:设 $A = M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$,$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r$,$\varphi(x) = x^n - 1$,$R(f,\varphi)$ 为 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的结式,则熟知([9,p.96])

$R(f,\varphi) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 有公根,

故由引理 3 有,

A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow R(f,\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 无公根.

于是定理 4 得证.

根据定理 4 有

定理 5 设 p 为素数, $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 为有理数, 则循环矩阵 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1})$ 可逆的充分必要条件是 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} \neq 0$ 且 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 不全相同.

证: 令 $f(x) = \sum_{r=0}^{p-1} a_r x^r$, 注意到 $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1)$, $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 在有理数域上不可约, 则据定理 4 有

$$
\begin{aligned}
M(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}) \text{ 可逆} &\Leftrightarrow f(x) \text{ 与 } x^p - 1 \text{ 无公根} \\
&\Leftrightarrow f(1) \neq 0 \quad \text{且 } x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \nmid f(x) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p-1} a_i \neq 0 \text{ 且 } a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} \text{ 不成立}.
\end{aligned}
$$

于是定理得证.

定理 6 设 p 为奇素数, $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-1}$ 为有理数, 则循环矩阵 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{2p-1})$ 可逆的充分必要条件是

(1) $\sum_{r=0}^{2p-1} a_r \neq 0$,

(2) $\sum_{r=0}^{2p-1} (-1)^r a_r \neq 0$,

(3) 当 $r = 0, 1, \cdots, p-1$ 时 $(-1)^r (a_r - a_{r+p})$ 不全相同,

(4) 当 $r = 0, 1, \cdots, p-1$ 时 $a_r + a_{r+p}$ 不全相同.

证: 令 $A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{2p-1})$, 则由 (1.1) 式知

$$
\begin{aligned}
|A| &= \prod_{k=0}^{2p-1} \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{2p}} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{pr}{2p}} \right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k \\ k \neq p}}^{2p-1} \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{2p}} \right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ 2 | k}}^{2p-1} \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{2p}} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i a_i \right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ (k,2p)=1}}^{2p-1} \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{kr}{2p}} \right) \cdot \prod_{m=1}^{p-1} \left(\sum_{r=0}^{2p-1} a_r e^{2\pi i \frac{mr}{p}} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i a_i \right) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ (k,2p)=1}}^{2p-1} \left(\sum_{r=0}^{p-1} (a_r - a_{r+p}) e^{2\pi i \frac{kr}{2p}} \right) \cdot \prod_{m=1}^{p-1} \left(\sum_{r=0}^{p-1} (a_r + a_{r+p}) e^{2\pi i \frac{mr}{p}} \right),
\end{aligned}
$$

其中 $(k, 2p) = 1$ 表示 k 与 $2p$ 互质.

当 $m \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ 时熟知(见[10, p.9]) $e^{2\pi i \frac{m}{p}}$ 为 $p-1$ 次代数数, 且它适合的有理数域上不可约多项式为 $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$; 当 k 与 $2p$ 互质时 $e^{2\pi i \frac{k}{2p}}$ 为 $p-1$ 次代数数, 它满足的有理数域上不可约多项式为 $\Phi_p(-x) = x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1$. 令

$$
f(x) = \sum_{r=0}^{p-1} (a_r + a_{r+p}) x^r, \quad g(x) = \sum_{r=0}^{p-1} (a_r - a_{r+p}) x^r,
$$

则当 $1 \leqslant m \leqslant p-1$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(e^{2\pi i \frac{m}{p}}) \neq 0 &\Leftrightarrow \Phi_p(x) \nmid f(x) \\
&\Leftrightarrow a_0 + a_p, a_1 + a_{p+1}, \cdots, a_{p-1} + a_{2p-1} \text{ 不全相同};
\end{aligned}
$$

当 k 与 $2p$ 互质时,

$$
\begin{aligned}
g(e^{2\pi i \frac{k}{2p}}) \neq 0 &\Leftrightarrow \Phi_p(-x) \nmid g(x) \\
&\Leftrightarrow (-1)^r (a_r - a_{r+p}) \text{ 在 } r = 0, 1, \cdots, p-1 \text{ 时不全相同}.
\end{aligned}
$$

综上可知，

$$A\text{ 可逆}\Leftrightarrow |A| = \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{2p-1}(-1)^i a_i\right)\cdot \prod_{m=1}^{p-1} f\left(e^{2\pi i\frac{m}{p}}\right)\cdot \prod_{\substack{k=1\\(k,2p)=1}}^{2p-1} g\left(e^{2\pi i\frac{k}{2p}}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow(1)、(2)、(3)、(4)\text{ 均成立}.$$

定理得证.

最后我们讨论 2^m 阶循环矩阵可逆性的判定. 为此先有

引理 4 设 $n = 2^m, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为复数，$A = M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 为循环矩阵，若

$a_r^{(0)} = a_r,\quad r = 0,1,\cdots,2^m-1,$

$a_r^{(k)} = a_r^{(k-1)} + a_{r+2^{m-k}}^{(k-1)}, b_r^{(k)} = a_r^{(k-1)} - a_{r+2^{m-k}}^{(k-1)},\quad k = 1,2,\cdots,m,\quad r = 0,1,\cdots,2^{m-k}-1,$

则

$$|A| = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)\prod_{k=1}^{m} N_k,$$

其中

$$N_k = \prod_{\substack{s=1\\2\nmid s}}^{2^{m-k+1}-1}\left(\sum_{r=0}^{2^{m-k}-1} b_r^{(k)} e^{2\pi i\frac{rs}{2^{m-k+1}}}\right).$$

证：对 m 施行归纳法. 当 $m = 1$ 时 $n = 2, k = 1, N_1 = b_0^{(1)} = a_0 - a_1$. 又 $|A| = \begin{vmatrix} a_0 & a_1\\ a_1 & a_0\end{vmatrix} = (a_0 + a_1)(a_0 - a_1)$，故 $m = 1$ 时引理正确. 现设公式对小于 m 的自然数正确，则由(1.1)式和归纳假设知

$$\begin{aligned}
|M(a_0, a_1, \cdots, a_{2^m-1})| &= \prod_{s=0}^{2^m-1}\left(\sum_{r=0}^{2^m-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{2^m}}\right) = \prod_{\substack{s=1\\2\nmid s}}^{2^m-1}\left(\sum_{r=0}^{2^m-1} a_r e^{2\pi i\frac{rs}{2^m}}\right)\cdot\prod_{k=0}^{2^{m-1}-1}\left(\sum_{r=0}^{2^m-1} a_r e^{2\pi i\frac{2kr}{2^m}}\right)\\
&= \prod_{\substack{s=1\\2\nmid s}}^{2^m-1}\left(\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}(a_r - a_{r+2^{m-1}})e^{2\pi i\frac{rs}{2^m}}\right)\cdot\prod_{k=0}^{2^{m-1}-1}\left(\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}(a_r + a_{r+2^{m-1}})e^{2\pi i\frac{kr}{2^{m-1}}}\right)\\
&= \prod_{\substack{s=1\\2\nmid s}}^{2^m-1}\left(\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} b_r^{(1)} e^{2\pi i\frac{rs}{2^m}}\right)\cdot\prod_{k=0}^{2^{m-1}-1}\left(\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} a_r^{(1)} e^{2\pi i\frac{kr}{2^{m-1}}}\right)\\
&= N_1\cdot|M(a_0^{(1)}, \cdots, a_{2^{m-1}-1}^{(1)})| = N_1\cdot\left(\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_i^{(1)}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m-1} N_{k+1}\\
&= \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} a_i\right)\prod_{k=1}^{m} N_k,
\end{aligned}$$

即引理对 2^m 阶循环矩阵正确.

根据数学归纳法原理，由上知引理正确.

注 2：根据代数数论([10, p.166])知，当 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为有理数时引理 4 中的 $N_1, \cdots, N_m$ 均为有理数，当 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为有理整数时 $N_1, \cdots, N_m$ 也都是有理整数.

定理 7 设 $n = 2^m, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为有理数，$a_r^{(k)}$ 与 $b_r^{(k)}$ 定义如下：

$a_r^{(0)} = a_r,\qquad r = 0,1,\cdots,2^m-1,$

$a_r^{(k)} = a_r^{(k-1)} + a_{r+2^{m-k}}^{(k-1)}, b_r^{(k)} = a_r^{(k-1)} - a_{r+2^{m-k}}^{(k-1)},\qquad k = 1,2,\cdots,m,\quad r = 0,1,\cdots,2^{m-k}-1,$

则循环矩阵 $M(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 可逆的充分必要条件是

(1) $a_0^{(m)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0,$

(2) 任取 $k\in\{1,\cdots,m\}$，$b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \cdots, b_{2^{m-k}-1}^{(k)}$ 不全为零.

证：当 $2\nmid s$ 时熟知(见[10]) $e^{2\pi i\frac{s}{2^{m-k+1}}}$ 为 2^{m-k} 次代数数，故由 $b_r^{(k)}$ 为有理数知

$$\sum_{r=0}^{2^{m-k}-1} b_r^{(k)} e^{2\pi i \frac{rs}{2^{m-k+1}}} = 0 \Leftrightarrow b_0^{(k)} = b_1^{(k)} = \cdots = b_{2^{(k)}_{\lambda_k}-1}^{(k)} = 0 .$$

由此利用引理 4 得

$$\begin{aligned} M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) \text{ 可逆} &\Leftrightarrow |M(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})| \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right) \cdot \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{s=1\\ 2\nmid s}}^{2^{m-k+1}-1} \left(\sum_{r=0}^{2^{m-k}-1} b_r^{(k)} e^{2\pi i \frac{rs}{2^{m-k+1}}}\right) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0 \text{ 且 } b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \cdots, b_{2^{(k)}_{\lambda_k}-1}^{(k)} \text{ 不全为零}(k = 1,2,\cdots,m). \end{aligned}$$

于是定理得证.

2^m 阶循环矩阵在数论变换与循环卷积计算中非常有用,我们上面所给的判定可逆性的方法利用了逐次降阶判定的思想.值得指出,孙智峰([11])已运用逐次降阶的思想创造了 2^m 阶循环矩阵快速求逆方法.

参考文献:

[1] Dickson L E. History of the Theory of Numbers (Vol.I)[M]. New York: Chelsea Publishing Company,1952.

[2] Polya G,Szego G.张奠宙,等.译,数学分析中的问题和定理(第二卷)[M],上海:上海科学技术出版社,1985,118-127.

[3] 蒋增荣.数论变换[M].上海:上海科学技术出版社,1980.

[4] 屠伯埙,徐诚浩,王芬.高等代数[M].上海:上海科学技术出版社,1987.

[5] 屠伯埙.线性代数——方法导引[M].上海:复旦大学出版社,1984.

[6] 王向东,周士藩.高等代数常用方法[M].北京:科学出版社,1989.

[7] 李庆扬,易大义,王能超.现代数值分析[M].北京:高等教育出版社,1995.

[8] 李乔.矩阵论八讲[M].上海:上海科学技术出版社,1988.

[9]《数学手册》编写组.数学手册[M].北京:高等教育出版社,1979.

[10] 柯召,孙琦. 数论讲义(下)[M]. 北京:高等教育出版社,1987.

[11] 孙智峰.用近世代数解释重磁异常的新方法[D].南京:南京大学地质系研究生毕业论文,1987.

The inverse matrices, Spectral condition numbers and invertible conditions of cyclic matrices

SUN Zhi-hong

(Huaiyin Teachers College, Huaiyin 223001, Jiangsu)

Abstract: In this paper we determine the inverse matrix, spectral norm and spectral condition number of a given cyclic matrix. We also obtain invertible conditions of cyclic matrices. In particular, invertible conditions are characterized for those cyclic matrices of order p, 2p and 2^m, where p is an old prime.

Key words: cyclic matrices, inverse matrix , invertible condition, spectral norm , characteristic value.

[责任编辑:柏传志]