组合和 $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k\equiv r(\mathrm{mod}\ m)}}^{n}\binom{n}{k}$ 及其数论应用(Ⅱ)*

孙智宏
(南京大学)

COMBINATORIAL SUM $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k\equiv r(\mathrm{mod}\ m)}}^{n}\binom{n}{k}$ AND ITS APPLICATIONS IN NUMBER THEORY (II)

Sun Zhihong
(Nanjing University)

Abstract

This paper continues the disscussion of [1],and obtains the expressions of $\Delta_m(k,n)$ for $m=8,9,16$, where

$$\Delta_m(k,n)=\begin{cases} mT^n_{\frac{n}{2}+k(m)}-2^n, & \text{if } 2\nmid m, \\ mT^n_{[\frac{n}{2}]+k(m)}-2^n, & \text{if } 2\mid m \end{cases}, \qquad T^n_{r(m)}=\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv r(\mathrm{mod}\ m)}}^{n}\binom{n}{k}$$

As a consequence, we prove the following

$$u_{p-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}/p\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^k}{2k-1}\quad(\mathrm{mod}\,p)$$

where p is an odd prime and $u_0=0, u_1=1, u_{n+1}=2u_n+u_{n-1}$.

本文沿用(Ⅰ)中的记号与约定.特别地

* 1989年10月30日收到.

$T^n_{r(m)}$ 表示组合和 $\sum\limits_{\substack{k=0\\k\equiv r(\bmod m)}}^{n}\binom{n}{k}$,

当$2|m$时$\Delta_m(k,n)$表示$mT^n_{[\frac{n}{2}]+k(m)}-2^n$,

$x\equiv r(m)$ 为 $x\equiv r(\bmod\ m)$的简写,

$q_p(a)=\dfrac{a^{p-1}-1}{p}$为$a$对奇素数$p$的 Fermat 商,

$u_n(a,b)$、$v_n(a,b)$表如下的 Lucas 序列u_n、v_n

$$\begin{cases}u_0=0,u_1=1,u_{n+1}=bu_n-au_{n-1}\\ v_0=2,v_1=b,v_{n+1}=bv_n-av_{n-1}\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

§ 2.1　Δ_{16}(r,p)与Δ_8(r,p)的计算公式

定理 2.1　设A_n、$B_n(n=0,1,\cdots)$如下定义:

$$A_0=B_0=B_1=0,A_1=1,$$

$$A_{n+1}=4A_n-2A_{n-1}-2B_{n-1},B_{n+1}=4B_n-A_{n-1}-2B_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则 $2\nmid p$ 时 $\Delta_{16}(r,p)=\Delta_{16}(17-r,p)$ 且有

$$\Delta_{16}(1,p)=2^{\frac{p+1}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p+1}{2}}-A_{\frac{p-1}{2}}-B_{\frac{p-1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(2,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}+4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p-1}{2}}+B_{\frac{p-1}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(3,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}-4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)-8(B_{\frac{p+1}{2}}-B_{\frac{p-1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(4,p)=2^{\frac{p+1}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)-8B_{\frac{p-1}{2}}$$

$$\Delta_{16}(5,p)=2^{\frac{p+1}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8B_{\frac{p-1}{2}}$$

$$\Delta_{15}(6,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}-4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8(B_{\frac{p+1}{2}}-B_{\frac{p-1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(7,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}+4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)-8(A_{\frac{p-1}{2}}+B_{\frac{p-1}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(8,p)=2^{\frac{p+1}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-4u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)-8(A_{\frac{p+1}{2}}-A_{\frac{p-1}{2}}-B_{\frac{p-1}{2}})$$

证　首先由(Ⅰ)的(1.2)式知 $\Delta_{16}(r,p)=\Delta_{16}(1-r,p)=\Delta_{16}(17-r,p)$. 又由(Ⅰ)的推论 1.9 知

$$\Delta_{16}(k,p+2)=\Delta_{16}(k+1,p)+2\Delta_{16}(k,p)+\Delta_{16}(k-1,p)$$

故可对 p 归纳证明定理.

(1) $p=1$ 时直接验证可知定理成立．

(2) 设定理对奇数 p 成立，下证定理对 $p+2$ 成立．

$$\Delta_{16}(1,p+2)=\Delta_{16}(2,p)+2\Delta_{16}(1,p)+\Delta_{16}(0,p)=\Delta_{16}(2,p)+3\Delta_{16}(1,p)$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}+12u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8(3A_{\frac{p+1}{2}}-2A_{\frac{p-1}{2}}-2B_{\frac{p-1}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}+4u_{\frac{p+3}{2}}(2,4)-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p+3}{2}}-A_{\frac{p+1}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(2,p+2)=\Delta_{16}(3,p)+2\Delta_{16}(2,p)+\Delta_{16}(1,p)$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p+1}{2}}-3B_{\frac{p+1}{2}}+A_{\frac{p-1}{2}}+2B_{\frac{p-1}{2}})$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p+1}{2}}+B_{\frac{p+1}{2}}-B_{\frac{p+3}{2}})$$

$$\Delta_{16}(3,p+2)=\Delta_{16}(4,p)+2\Delta_{16}(3,p)+\Delta_{16}(2,p)$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8(A_{\frac{p-1}{2}}+2B_{\frac{p-1}{2}}-3B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8(B_{\frac{p+3}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(4,p+2)=\Delta_{16}(5,p)+2\Delta_{16}(4,p)+\Delta_{16}(3,p)$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}-12u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)-8B_{\frac{p+1}{2}}$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+3}{2}}(2,4)+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8B_{\frac{p+1}{2}}$$

$$\Delta_{16}(5,p+2)=\Delta_{16}(6,p)+2\Delta_{16}(5,p)+\Delta_{16}(4,p)$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}-12u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8u_{\frac{p-1}{2}}(2,4)+8B_{\frac{p+1}{2}}$$

$$=2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+3}{2}}(2,4)+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8B_{\frac{p+1}{2}}$$

$$\Delta_{16}(6,p+2)=\Delta_{16}(7,p)+2\Delta_{16}(6,p)+\Delta_{16}(5,p)$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8(A_{\frac{p-1}{2}}+2B_{\frac{p-1}{2}}-3B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}-4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)+8(B_{\frac{p+3}{2}}-B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$\Delta_{16}(7,p+2)=\Delta_{16}(8,p)+2\Delta_{16}(7,p)+\Delta_{16}(6,p)$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8(A_{\frac{p+1}{2}}-3B_{\frac{p+1}{2}}+A_{\frac{p-1}{2}}+2B_{\frac{p-1}{2}})$$

$$=-2^{\frac{p+3}{2}}+4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4)-8(A_{\frac{p+1}{2}}+B_{\frac{p+1}{2}}-B_{\frac{p+3}{2}})$$

$$\Delta_{16}(8,p+2)=\Delta_{16}(9,p)+2\Delta_{16}(8,p)+\Delta_{16}(7,p)=3\Delta_{16}(8,p)+\Delta_{16}(7,p)$$

$$= 2^{\frac{p+3}{2}} + 12u_{\frac{p+1}{2}}(2,4) - 8u_{\frac{p-1}{2}}(2,4) - 8(3A_{\frac{p+1}{2}} - 2A_{\frac{p-1}{2}} - 2B_{\frac{p-1}{2}} - B_{\frac{p+1}{2}})$$

$$= 2^{\frac{p+3}{2}} + 4u_{\frac{p+3}{2}}(2,4) - 4u_{\frac{p+1}{2}}(2,4) - 8(A_{\frac{p+3}{2}} - A_{\frac{p+1}{2}} - B_{\frac{p+1}{2}})$$

(3) 由归纳法原理定理对一切奇数 p 成立.

推论 2.1 设 p 为奇素数，$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 若 p \equiv \pm(2i-1) \pmod{32} \\ 0, & 若 p \not\equiv \pm(2i-1) \pmod{32} \end{cases}$

则

$$u_{\frac{p-1}{2}}(2+\sqrt{2},4) \equiv (\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7) + (\varepsilon_5 - \varepsilon_4)\sqrt{2} \pmod{p}$$

$$u_{\frac{p+1}{2}}(2+\sqrt{2},4) \equiv (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8)$$
$$+ (\varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\sqrt{2} \pmod{p}$$

证 设 A_n、B_n 如定理中所定义，则易知

$$u_n(2+\sqrt{2},4) = A_n + B_n\sqrt{2}, \quad n = 0,1,\cdots$$

由定理 2.1 知 $\Delta_{16}(5,p) - \Delta_{16}(4,p) = 16B_{\frac{p-1}{2}}$，故

$$B_{\frac{p-1}{2}} = T^p_{\frac{p-1}{2}+5(16)} - T^p_{\frac{p-1}{2}+4(16)} \equiv \varepsilon_5 - \varepsilon_4 \pmod{p}$$

又 $\Delta_{16}(6,p) - \Delta_{16}(3,p) = 16(B_{\frac{p+1}{2}} - B_{\frac{p-1}{2}})$. 故得

$$B_{\frac{p+1}{2}} = B_{\frac{p-1}{2}} + T^p_{\frac{p-1}{2}+6(16)} - T^p_{\frac{p-1}{2}+3(16)} \equiv \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \pmod{p}$$

再由 $\Delta_{16}(2,p) - \Delta_{16}(7,p) = 16(A_{\frac{p-1}{2}} + B_{\frac{p-1}{2}} - B_{\frac{p+1}{2}})$ 即知

$$A_{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 \pmod{p}$$

最后由 $\Delta_{16}(1,p) - \Delta_{16}(8,p) = 16(A_{\frac{p+1}{2}} - A_{\frac{p-1}{2}} - B_{\frac{p-1}{2}})$ 解得

$$A_{\frac{p+1}{2}} \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8 \pmod{p}$$

证完.

定理 2.2 设 $2\nmid p$, $\Delta_8(r,p) = 8T^p_{\frac{p-1}{2}+r(8)} - 2^p$, 则

(i) 当 $p \equiv 1 \pmod{4}$ 时

$$\Delta_8(0,p) = \Delta_8(1,p) = 2^{\frac{p+1}{2}} + 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(2,p) = \Delta_8(7,p) = -2^{\frac{p+1}{2}} + 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(3,p) = \Delta_8(6,p) = -2^{\frac{p+1}{2}} - 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(4,p) = \Delta_8(5,p) = 2^{\frac{p+1}{2}} - 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2).$$

(ii) 当 $p \equiv 3 \pmod{4}$ 时，

$$\Delta_8(0,p)=\Delta_8(1,p)=2^{\frac{p+1}{2}}+2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(2,p)=\Delta_8(7,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}+2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(3,p)=\Delta_8(6,p)=-2^{\frac{p+1}{2}}-2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(4,p)=\Delta_8(5,p)=2^{\frac{p+1}{2}}-2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2).$$

证　由(Ⅰ)的(1.2)式知 $\Delta_8(r,p)=\Delta_8(1-r,p)=\Delta_8(9-r,p)$, 故

$\Delta_8(0,p)=\Delta_8(1,p),\Delta_8(7,p)=\Delta_8(2,p),\Delta_8(6,p)=\Delta_8(3,p),\Delta_8(5,p)=\Delta_8(4,p)$,

又

$$\begin{aligned}\Delta_{16}(r,p)+\Delta_{16}(r+8,p)&=16(T^p_{\frac{p-1}{2}+r(16)}+T^p_{\frac{p-1}{2}+r+8(16)})-2\times2^p\\&=16T^p_{\frac{p-1}{2}+r(8)}-2^{p+1},\end{aligned}$$

故

$$\Delta_8(r,p)=8T^p_{\frac{p-1}{2}+r}-2^p=\frac{1}{2}[\Delta_{16}(r,p)+\Delta_{16}(r+8,p)]=\frac{1}{2}[\Delta_{16}(r,p)+\Delta_{16}(9-r,p)].$$

再注意到(由(Ⅰ)的引理1.5)

$$u_n(2,4)=\frac{1}{2\sqrt2}\{(\frac{4+2\sqrt2}{2})^n-(\frac{4-2\sqrt2}{2})^n\}=\frac{1}{2\sqrt2}\{(2+\sqrt2)^n-(2-\sqrt2)^n\}$$

$$=(\sqrt2)^n\cdot\frac{1}{2\sqrt2}\{(1+\sqrt2)^n-(-1)^n(1-\sqrt2)^n\}=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}u_n(-1,2), & 若2|n\\ 2^{\frac{n-3}{2}}v_n(-1,2), & 若2\nmid n\end{cases}$$

便可由定理2.1得出定理结论.

当 $2|n$ 时, $\Delta_8(r,n)$、$\Delta_{16}(r,n)$ 可由下式求出((Ⅰ)之 1.3_2 式)

$$\Delta_8(r,n)=\Delta_8(r,n-1)+\Delta_8(r+1,n-1)$$

$$\Delta_{16}(r,n)=\Delta_{16}(r,n-1)+\Delta_{16}(r+1,n-1).$$

§ 2.2　几个引理

为便于下节讨论 $\Delta_8(r,p)$ 公式的数论应用,我们先给出几个引理.

引理2.1　设 $2\nmid p$, $S=T^p_{0(8)}-T^p_{4(8)}$, $D=T^p_{2(8)}-T^p_{6(8)}$, 则

(1) 当 $p\equiv1(8)$ 时, $S=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)$, $D=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$;

(2) 当 $p\equiv3(8)$ 时, $S=(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$, $D=(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)$;

(3) 当 $p\equiv 5(8)$ 时，$S=(-1)^{\frac{p+3}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$，$D=(-1)^{\frac{p-5}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)$.

(4) 当 $p\equiv 7(8)$ 时，$S=(-1)^{\frac{p+1}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)$，$D=(-1)^{\frac{p-7}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$.

证 (1) $p\equiv 1(8)$，这时

$$\Delta_8(0,p)-\Delta_8(4,p)=8(T^p_{\frac{p-1}{2}(8)}-T^p_{\frac{p-1}{2}+4(8)})=8(-1)^{\frac{p-1}{8}}(T^p_{0(8)}-T^p_{4(8)})=8(-1)^{\frac{p-1}{2}}S,$$

$$\Delta_8(2,p)-\Delta_8(6,p)=8(T^p_{\frac{p-1}{2}+2(8)}-T^p_{\frac{p-1}{2}+6(8)})=8(-1)^{\frac{p-1}{8}}(T^p_{2(8)}-T^p_{6(8)})$$
$$=8(-1)^{\frac{p-1}{8}}D$$

而由定理 2.2

$$\Delta_8(0,p)-\Delta_8(4,p)=2\times 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2),\Delta_8(2,p)-\Delta_8(6,p)=2\times 2^{\frac{p+7}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$$

故

$$S=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2),D=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2).$$

(2) $p\equiv 3(8)$，这时由 (Ⅰ) 的推论 1.8 得

$$\Delta_8(0,p)-\Delta_8(4,p)=8(T^p_{\frac{p-1}{2}(8)}-T^p_{\frac{p-1}{2}+4(8)})=8(T^p_{\frac{p+1}{2}(8)}-T^p_{\frac{p+1}{2}-4(8)})$$
$$=8(-1)^{\frac{p-3}{8}}(T^p_{2(8)}-T^p_{6(8)})=8(-1)^{\frac{p-3}{8}}D.$$

$$\Delta_8(2,p)-\Delta_8(6,p)=8(T^p_{\frac{p-1}{2}+2(8)}-T^p_{\frac{p-1}{2}+6(8)})=8(T^p_{\frac{p+1}{2}-2(8)}-T^p_{\frac{p+1}{2}-6(8)})$$
$$=8(T^p_{\frac{p+1}{2}+6(8)}-T^p_{\frac{p+1}{2}+2(8)})=8(-1)^{\frac{p-3}{8}}S$$

而据定理 2.2

$$\Delta_8(0,p)-\Delta_8(4,p)=2\times 2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2),$$

$$\Delta_8(2,p)-\Delta_8(6,p)=2\times 2^{\frac{p+1}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2).$$

故

$$S=(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2),$$

$$D=(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-7}{4}}v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2).$$

$p\equiv 5(8)$ 与 $p\equiv 7(8)$ 的情形同理可证.

引理 2.2 设 p 为奇素数，$S=T^p_{0(8)}-T^p_{4(8)}$，$D=T^p_{2(8)}-T^p_{6(8)}$，

则

$$S\equiv 1+\frac{p}{4}\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{4}]}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\pmod{p^2},$$

$$D\equiv\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^{k}}{2k-1}\pmod{p^2}.$$

证　由(Ⅰ)之引理 1.1 知

$$S=T_{0(8)}^{p}-T_{4(8)}^{p}\equiv 1+p\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 0(8)}}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 4(8)}}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big)$$

$$\equiv 1-p\Big(\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{8}]}\frac{1}{8k}-\sum_{k=1}^{[\frac{p+3}{8}]}\frac{1}{8k-4}\Big)$$

$$\equiv 1+\frac{p}{4}\Big(\sum_{k=1}^{[\frac{p+3}{8}]}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{8}]}\frac{1}{2k}\Big)$$

$$\equiv 1+\frac{p}{4}\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{4}]}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\pmod{p^2}$$

$$D=T_{2(8)}^{p}-T_{6(8)}^{p}\equiv p\Big(\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 2(8)}}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 6(8)}}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big)\equiv p\Big(\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{8}]}\frac{1}{8k-2}-\sum_{k=1}^{[\frac{p+5}{8}]}\frac{1}{8k-6}\Big)$$

$$\equiv\frac{p}{2}\Big(\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{8}]}\frac{1}{4k-1}-\sum_{k=1}^{[\frac{p+5}{8}]}\frac{1}{4k-3}\Big)\equiv\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^{k}}{2k-1}\pmod{p^2}$$

故引理得证.

引理 2.3　设 p 为 $4k+1$ 形素数, b 为整数, $(\frac{b^2+4}{p})=1$, 则

$$p\mid u_{\frac{p-1}{4}}(-1,b)\Leftrightarrow u_{\frac{p+1}{2}}(-1,b)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\pmod{p}$$

证　记 $u_n=u_n(-1,b)$, $v_n=v_n(-1,b)$, 由(Ⅰ)的引理 1.6 和 1.7 知

$$v_{\frac{p-1}{2}}^2=2+v_{p-1}=2+2u_p-bu_{p-1}\equiv 2+2-0\equiv 4\pmod{p}$$

由此得 $p\nmid v_{\frac{p-1}{2}}$, 从而 $p\mid\frac{u_{p-1}}{v_{\frac{p-1}{2}}}=u_{\frac{p-1}{2}}=u_{\frac{p-1}{4}}v_{\frac{p-1}{4}}$.

由(Ⅰ)的引理 1.7

$$u_{\frac{p+1}{2}}=u_{\frac{p+3}{4}}^2+u_{\frac{p-1}{4}}^2=\Big(\frac{v_{\frac{p-1}{4}}+bu_{\frac{p-1}{4}}}{2}\Big)^2+u_{\frac{p-1}{4}}^2$$

$$=\frac{1}{4}(v_{\frac{p-1}{4}}^2+b^2u_{\frac{p-1}{4}}^2)+u_{\frac{p-1}{4}}^2=\frac{1}{4}[v_{\frac{p-1}{4}}^2+(b^2+4)u_{\frac{p-1}{4}}^2]$$

$$\equiv \frac{1}{4}[2(b^2+4)u^2_{\frac{p-1}{4}}+4(-1)^{\frac{p-1}{4}}] \equiv \frac{1}{4}[2v^2_{\frac{p-1}{4}}-4(-1)^{\frac{p-1}{4}}] \pmod p$$

故

当 $p|u_{\frac{p-1}{4}}$ 时，$u_{\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$；当 $p|v_{\frac{p-1}{4}}$ 时，$u_{\frac{p+1}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$

注意到 $p\nmid u_{\frac{p-1}{4}}$ 蕴含 $p|v_{\frac{p-1}{4}}$，便知引理成立．

引理 2.4 设 p 为奇素数，$p\nmid m$，则

(1) $$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k\cdot m^k} \equiv \frac{m^{p-1}-1}{p} - 2\cdot\frac{(\frac{m}{p})u_p(1-m,2)-1}{p} \pmod p$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{m^k}{k} \equiv -\frac{v_p(1-m,2)-2}{p} \pmod p$$

证 由二项式定理知

(a) $$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(\sqrt{m})^k = (1+\sqrt{m})^p - 1 - (\sqrt{m})^p$$

(b) $$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(-\sqrt{m})^k = (1-\sqrt{m})^p - 1 + (\sqrt{m})^p$$

从 (a) 式减去 (b) 式得

$$2\sum_{\substack{k=1\\ 2\nmid k}}^{p-1}\binom{p}{k}(\sqrt{m})^k = (1+\sqrt{m})^p - (1-\sqrt{m})^p - 2(\sqrt{m})^p$$

利用 (Ⅰ) 的引理 1.5，有

$$2\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\binom{p}{2s-1}(\sqrt{m})^{2s-1} = 2\sqrt{m}\,u_p(1-m,2) - 2\sqrt{m}\cdot(\sqrt{m})^{p-1}$$

即

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{p}\binom{p}{2s-1}m^{s-1} = \frac{1}{p}[u_p(1-m,2) - m^{\frac{p-1}{2}}]$$

据 (Ⅰ) 的引理 1.1 知

$$\frac{1}{p}\binom{p}{2s-1} = \frac{1}{2s-1}\binom{p-1}{2s-2} \equiv \frac{1}{2s-1} \pmod p$$

又

$$\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{2s-1}m^{s-1} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{2(\frac{p+1}{2}-k)-1}m^{\frac{p+1}{2}-k-1} \equiv \frac{-1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^{\frac{p-1}{2}-k}}{k}$$

$$= -\frac{1}{2}m^{\frac{p-1}{2}}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot m^k} \equiv -\frac{1}{2}(\frac{m}{p})\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot m^k} \pmod p$$

故 $\quad \frac{1}{p}[u_p(1-m,2)-m^{\frac{p-1}{2}}]\equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p}\right)\sum\limits_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot m^k}\pmod p$

再由(Ⅰ)的引理1.2即得(1)式.

若(a)式加上(b)式,则得

$$2\sum_{\substack{k=1\\2|k}}^{p-1}\binom{p}{k}(\sqrt{m})^k=(1+\sqrt{m})^p+(1-\sqrt{m})^p-2$$

即

$$2\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{p}\binom{p}{2s}(\sqrt{m})^{2s}=\frac{1}{p}[v_p(1-m,2)-2]$$

注意到 $\frac{1}{p}\binom{p}{2s}=\frac{1}{2s}\binom{p-1}{2s-1}\equiv -\frac{1}{2s}\pmod p$ 便知(2)成立.

综上引理得证.

引理2.5　设 p 为奇素数, $p\nmid m$, 则

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^k}{k}-m\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot m^k}\equiv(m-1)q_p(m-1)-mq_p(m)\pmod p$$

证　由于 $\frac{1}{p}\binom{p}{k}=\frac{1}{k}\binom{p-1}{k-1}\equiv\frac{(-1)^{k-1}}{k}\pmod p$, 故

$$[(1-m)^p-1+m^p]/p=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(-m)^k\equiv\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-m)^k\pmod p$$

即

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{m^k}{k}\equiv[(m-1)^p+1-m^p]/p=\frac{1}{p}[(m-1)^p-(m-1)-m^p+m]$$

$$\equiv(m-1)q_p(m-1)-mq_p(m)\pmod p$$

另一方面

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{m^k}{k}=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^k}{k}+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^{\frac{p-1}{2}+k}}{\frac{p-1}{2}+k}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^k}{k}-\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^{\frac{p+1}{2}+k}}{\frac{p+1}{2}-k}$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^k}{k}-m^{\frac{p-1}{2}}\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^{\frac{p+1}{2}-s}}{s}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{m^k}{k}-m\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot m^k}\pmod p$$

故引理成立.

推论2.2　设 p 为奇素数, $p\nmid m$, 则

$$v_p(1-m,2)-2m\left(\frac{m}{p}\right)u_p(1-m,2)+(m-1)^p+(m-1)\equiv 0\pmod{p^2}$$

证　由引理2.4和引理2.5立得.

§ 2.3　$\Delta_8(r,p)$ 公式的数论应用

作为 $\Delta_8(r,p)$ 公式的应用，我们将推导 Lucas 序列 $u_n(-1,2)$ 的数论性质．特别地，我们求出商 $u_{p-(\frac{2}{p})}(-1,2)/p$. 这是继 H.C.Williams[2] 求出 Fibonacci 商 $F_{p-(\frac{5}{p})}/p$ 后又一个已知的 Lucas 商．

定理 2.3　设 p 为奇素数，$u_n=u_n(-1,2)$，则

(1) 当 $p\equiv 1(8)$ 时，$u_{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, $u_{\frac{p+1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$

(2) 当 $p\equiv 3(8)$ 时，$u_{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$, $u_{\frac{p+1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p+5}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$

(3) 当 $p\equiv 5(8)$ 时，$u_{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-5}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$, $u_{\frac{p+1}{2}}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$

(4) 当 $p\equiv 7(8)$ 时，$u_{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$, $u_{\frac{p+1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$

证　(1) 由引理 2.1 和引理 2.2 立得

$$u_{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p), u_{\frac{p+1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{-\frac{p-1}{4}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$$

(2) 由引理 2.1 和引理 2.2 知

$$v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p), v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)\equiv(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{-p-7}{4}}\equiv(-1)^{\frac{p+5}{8}}2^{\frac{p+5}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$$

利用（I）的引理 1.7 即得

$$u_{\frac{p-1}{2}}=\frac{1}{8}[2v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)-2v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)]\equiv(-1)^{\frac{p-3}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$$

$$u_{\frac{p+1}{2}}=\frac{1}{8}[2v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)+2v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)]\equiv(-1)^{\frac{p+5}{8}}2^{\frac{p-3}{4}}(\mathrm{mod}\,p)$$

$p\equiv 5(8)$ 与 $p\equiv 7(8)$ 之情形类似可证．

值得指出，定理 2.3 的结果不是平凡的．因为一般说来给定整数 a,b, 当 b^2-4a 不是平方数时同时确定出 $u_{\frac{p-1}{2}}\mathrm{mod}\,p$、$u_{\frac{p+1}{2}}\mathrm{mod}\,p$ 仍是有待解决的问题．

作为定理 2.3 的应用，我们有

定理 2.4　设 p 为 $8k+1$ 形素数，$p=x^2+2y^2(x,y\in\mathbf{Z})$，则 $p|u_{\frac{p-1}{4}}(-1,2)$ 的充分必要条件是 $4|y$.

证　由引理 2.3 和定理 2.3 知

$$p|u_{\frac{p-1}{4}}(-1,2)\Longleftrightarrow(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$$

令 $t\in\mathbf{Z}$ 使 $x\equiv ty(\mathrm{mod}\,p)$，则

$$0\equiv p=x^2+2y^2\equiv t^2y^2+2y^2\equiv(t^2+2)y^2\quad(\mathrm{mod}\,p)$$

因 $|y|<p$，故 $t^2\equiv-2(\bmod\ p)$，从而

$$2^{\frac{p-1}{4}}=(-2)^{\frac{p-1}{4}}\equiv t^{\frac{p-1}{2}}\equiv(\frac{t}{p})=(\frac{xy}{p})\quad(\bmod p)$$

由 $p=x^2+2y^2\equiv1(8)$ 可知 $(x,y)=1,2\nmid x,2|y$. 令 $y=2^{\alpha}y_0,2\nmid y_0$，则有

$$(\frac{xy}{p})=(\frac{2^{\alpha}xy_0}{p})=(\frac{2}{p})^{\alpha}(\frac{x}{p})(\frac{y_0}{p})=(\frac{p}{x})(\frac{p}{y_0})=(\frac{2}{x})=(-1)^{\frac{x^2-1}{8}}$$

考虑 $p=x^2+2y^2\bmod16$ 的剩余知道

当 $p\equiv1(16)$ 时， $x\equiv\pm1(8)\Leftrightarrow4|y$;

当 $p\equiv9(16)$ 时， $x\equiv\pm1(8)\Leftrightarrow4\nmid y$.

因此

$$2^{\frac{p-1}{4}}\equiv(\frac{xy}{p})\equiv(\frac{2}{x})\equiv(-1)^{\frac{p-1}{8}+\frac{y}{2}}\quad(\bmod p)$$

$$p|u_{\frac{p-1}{4}}(-1,2)\Leftrightarrow(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}\equiv1(\bmod p)\Leftrightarrow4|y.$$

定理证完.

如果 $8k+1$ 形素数 p 表为 a^2+b^2,b 为偶数，则 $4|b$ 且由 [3](p.64) 知

$$2^{\frac{p-1}{4}}\equiv1(\bmod\ p)\Leftrightarrow x^4\equiv2(\bmod\ p)\text{有解}\Leftrightarrow8|b$$

故这时

$$p|u_{\frac{p-1}{4}}(-1,2)\Leftrightarrow(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}\equiv1(p)\Leftrightarrow(-1)^{\frac{p-1}{8}+\frac{b}{4}}=1\Leftrightarrow\frac{p-1}{8}\equiv\frac{b}{4}(\bmod2)$$

定理 2.5　设 p 为奇素数，则

$$u_{p-(\frac{2}{p})}(-1,2)/p\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^k}{2k-1}(\bmod p)$$

证　(1) $p\equiv1(8)$. 由引理 2.1 和引理 2.2 知

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)&=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}(2u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)-2u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2))\\&=2S-2D2^{\frac{p-1}{2}}u_{p-1}(-1,2)\\&=(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}u_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{8}}2^{\frac{p-1}{4}}v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)\\&=D(2S-2D)\equiv2SD\equiv2[1+\frac{p}{4}\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{4}]}\frac{(-1)^{k-1}}{k}][\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^k}{2k-1}]\\&\equiv p\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{(-1)^k}{2k-1}\quad(\bmod p^2)\end{aligned}$$

故

$$u_{p-1}(-1,2)/p \equiv 2^{-\frac{p-1}{2}} \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^k}{2k-1} \equiv \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^k}{2k-1} \pmod{p}$$

(2) 由引理 2.1 及 $4u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)=v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)+v_{\frac{p-1}{2}}(-1,2)$ 知

$$(-1)^{\frac{p-3}{8}} 2^{\frac{p-7}{4}} v_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)=D,$$

$$4(-1)^{\frac{p-3}{8}} 2^{\frac{p-7}{4}} u_{\frac{p+1}{2}}(-1,2)=D+S$$

两式相乘得

$$\frac{1}{2} \times 2^{\frac{p-1}{2}} u_{p+1}(-1,2)=D(S+D) \equiv SD \equiv \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^k}{2k-1} \pmod{p^2}$$

即

$$u_{p+1}(-1,2)/p \equiv 2^{-\frac{p-1}{2}} \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^k}{2k-1} \equiv -\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^k}{2k-1} \pmod{p}$$

$p \equiv 5(8)$ 与 $p \equiv 7(8)$ 的情形类似可证.

由此定理可得

定理 2.6　设 p 为奇素数, 则

(i) $$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^k}{k} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 4 \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \pmod{p}$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k \cdot 2^k} \equiv -4 \sum_{k=\frac{1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2}}^{[\frac{p}{4}]} \frac{1}{4k-(-1)^{\frac{p-1}{2}}} \pmod{p}$$

证　(i) 由引理 2.4 及 (I) 的引理 1.8 知

$$u_{p-(\frac{2}{p})}(-1,2)/p \equiv \frac{1}{4}[v_p(-1,2)-2] \equiv -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^k}{k} \pmod{p}$$

故由定理 2.5 知 (i) 成立.

(ii) 由引理 2.4 和 (I) 的推论 1.7 得

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k \cdot 2^k} \equiv q_p(2)+\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^k}{k} \equiv q_p(2)+2(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\equiv -2 \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{1}{2k-1}-2 \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}+k}}{2k-1} \equiv -2 \sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{1+(-1)^{k+\frac{p-1}{2}}}{2k-1} \pmod{p}$$

当 $p \equiv 1(\bmod\ 4)$ 时

$$\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]} \frac{1+(-1)^{k+\frac{p-1}{2}}}{2k-1}=2 \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \mid k}}^{\frac{p-1}{4}} \frac{1}{2k-1}=2 \sum_{k=1}^{[\frac{p}{8}]} \frac{1}{4k-1}$$

当 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ 时

$$\sum_{k=1}^{[\frac{p+1}{4}]}\frac{1+(-1)^{k+\frac{p-1}{2}}}{2k-1}=2\sum_{\substack{k=1\\2\nmid k}}^{\frac{p+1}{4}}\frac{1}{2k-1}=2\sum_{k=0}^{[\frac{p}{8}]}\frac{1}{4k+1}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k\cdot 2^k}\equiv -4\sum_{k=\frac{1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2}}^{[\frac{p}{8}]}\frac{1}{4k-(-1)^{\frac{p-1}{2}}}\quad(\mathrm{mod}\,p).$$

定理证完.

§2.4　$\Delta_9(\mathrm{r,n})$ 的计算公式

对于 $\Delta_9(r,n)$, 我们有

定理 2.7　设 $\Delta_9(r,n)=9T^n_{\frac{n}{2}+r(9)}-2^n$, $F(n)$ 如下定义

$$F(0)=1,\ F(1)=0,\ F(2)=2,\ F(n+3)=3F(n+1)-F(n)\qquad(n=0,1,\cdots)$$

则

$\Delta_9(0,n)=6F(n)+2(-1)^n$, $\Delta_9(\pm 1,n)=3F(n)-3F(n-1)-(-1)^n$,

$\Delta_9(\pm 2,n)=3F(n-1)-3F(n)-3F(n+1)-(-1)^n$, $\Delta_9(\pm 3,n)=-3F(n)+2(-1)^n$,

$\Delta_9(\pm 4,n)=3F(n+1)-(-1)^n$.

证　由 (I) 的 (1.7) 式知 $\Delta_9(k,n)$ 满足递推关系:

$\Delta_9(k,n+4)+\Delta_9(k,n+3)-3\Delta_9(k,n+2)-2\Delta_9(k,n+1)+\Delta_9(k,n)=0,\quad n=0,1,\cdots$

由此固定 k 对 n 归纳即可证得定理.

由于

$$\Delta_9(r,p)=9T^p_{\frac{p}{2}+r(9)}-2^p\equiv\begin{cases}7\quad(\mathrm{mod}\,p)\quad 当 r\equiv\pm\frac{p}{2}(9)时\\ -2\quad(\mathrm{mod}\,p)\quad 当 r\not\equiv\pm\frac{p}{2}(9)时\end{cases}$$

故从定理 2.7 立刻得到

推论 2.3　设 p 为大于 3 的素数, $F(n)$ 如定理 2.7 中定义, 则

(i) 当 $p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 9)$ 时, $F(p-1)\equiv 1$, $F(p)\equiv 0$, $F(p+1)\equiv 2\quad(\mathrm{mod}\ p)$

(ii) 当 $p\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\ 9)$ 时, $F(p-1)\equiv -2$, $F(p)\equiv 0$, $F(p+1)\equiv -1\quad(\mathrm{mod}\ p)$

(iii) 当 $p\equiv\pm 4(\mathrm{mod}\ 9)$ 时, $F(p-1)\equiv 1$, $F(p)\equiv 0$, $F(p+1)\equiv -1\quad(\mathrm{mod}\ p)$

利用 (I) 的推论 1.1 可得

推论 2.4　设 p 为大于 3 的素数, $F(n)$ 如定理 2.7 所定义, 则

(i) 当 $p \equiv \pm 1(9)$ 时，$\sum_{k=1}^{[\frac{p}{9}]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \frac{2^p-2}{p} + 3 \cdot \frac{F(p+1)-2}{p} \pmod p$

(ii) 当 $p \equiv \pm 2(9)$ 时，$\sum_{k=1}^{[\frac{p}{9}]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \frac{2^p-2}{p} + 3 \cdot \frac{F(p)-F(p-1)-2}{p} \pmod p$

(iii) 当 $p \equiv \pm 4(9)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{[\frac{p}{9}]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \frac{2^p-2}{p} + 3 \cdot \frac{F(p-1)-F(p)-F(p+1)-2}{p} \pmod p$$

参考文献

1 孙智宏.组合和 $\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv r(\mathrm{mod}\, m)}}^{n} \binom{n}{k}$ 及其数论应用(I).南京大学学报数学半年刊,11(1992),No.2.

2 Willias, H.C., A Note on the Fibonacci Quotient Fp−ε / p, Canad. Math. Bull., 25(1982), 366−370.

3 Ireland K. and Rosen M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, Spring−Verlag, New York, 1982.